



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

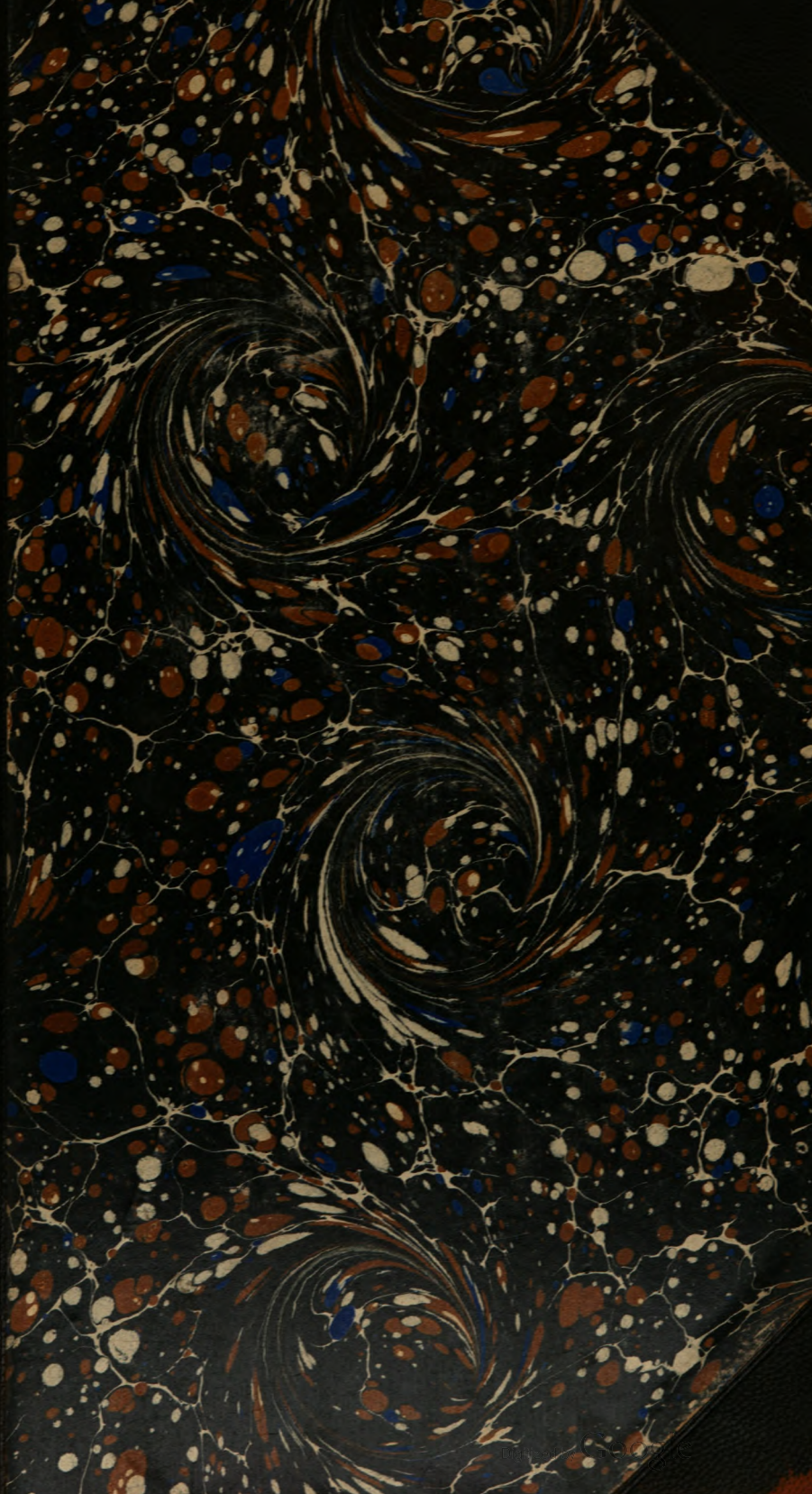
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

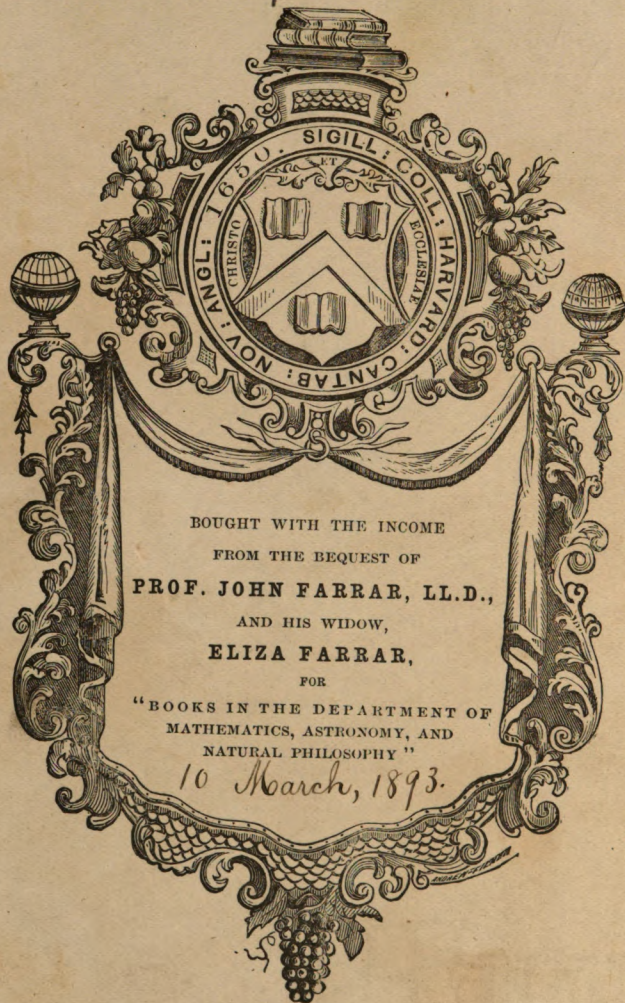
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>





SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5808,89











3412

⊙

Neue Behandlung  
der  
Parallelprojektionen  
und der  
Axonometrie.

Von  
<sup>Ar.</sup>  
Dr. A. Weiler  
in Zürich.

Mit 109 Figuren im Text.

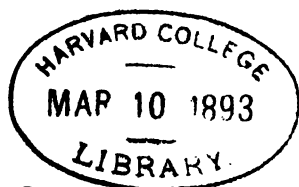


⊙ Leipzig,  
Verlag von B. G. Teubner.  
1889.



~~W. 7506~~

Math 5808.89



*Farrar fund.*

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

## Vorwort.

---

Vorliegende Behandlung der Parallelprojektionen, sowie der orthogonalen und schiefen Axonometrie ist für Lehrer der Mittelschulen, für Dozenten und Studierende höherer Schulen bestimmt. Zum Verständnisse werden die Elemente der Orthogonalprojektion und die Darstellung der Raumelemente in der Axonometrie als bekannt vorausgesetzt; von weiteren Hilfsmitteln ist im allgemeinen absichtlich kein Gebrauch gemacht worden, um das Werk möglichst allgemeinverständlich zu halten. Der Verfasser hat sich bestrebt, vor allem dem Zeichner nützlich zu sein, namentlich ist den Kreisprojektionen überall grosse Aufmerksamkeit geschenkt worden. Indessen sind auch mehrere rein geometrische Untersuchungen, welche mit jenem Teile des Stoffes in direktem Zusammenhange stehen, ausführlich behandelt.

Zürich, im Mai 1889.



# Inhaltsverzeichnis.

## Erster Teil.

### Parallelprojektionen ebener Systeme.

	Seite
1. Elementare Beziehungen zwischen Original und Bild, namentlich eines ebenen Systems; ähnliche und gleiche Punktreihen . .	1
2. Originale und Bilder von Rechtwinkelpaaren . . . . .	4
3. Erste Methode der Konstruktion von Rechtwinkelpaaren aus zwei gegebenen . . . . .	5
4. Zweite Methode dieser Konstruktion . . . . .	7
5. Dritte Methode derselben Konstruktion . . . . .	9
6. Anwendung auf Konstruktionen des Kreisbildes aus Punkten und Tangenten . . . . .	10
7. Herstellung der Bilder gleichgrosser Winkel mit Hilfe der Rechtwinkelpaare . . . . .	15
8. Der Versuch des Übertragens gleicher Strecken . . . . .	20
9. Die Winkelmessung mit Hilfe der Bilder von Rechtwinkelpaaren	22
10. Centrisch-affine Systeme des Bildsystems, welche dem Originalsysteme ähnlich sind . . . . .	24
11. Weitere Fundamentealeigenschaften der centrisch-affinen Systeme und Anwendungen . . . . .	30
12. Rechtwinklige Bilder von Rechtwinkelpaaren; die Axen der Kreisprojektion . . . . .	36
13. Spezialfälle der centrischen Affinität der zugeordneten Systeme	39
14. Zugeordnete Systeme des Bildsystems, welche dem Originalsysteme kongruent sind . . . . .	40
15. Die ausgezeichneten Elemente der beiden Systeme und die Überführung in die centrische Lage . . . . .	44

## Zweiter Teil.

### Hilfssätze über das orthogonale Trieder.

16. Das Spurendreieck und die Axenkreise . . . . .	50
17. Die Distanz und der Distanzkreis . . . . .	53
18. Rechtwinkelige Elemente am Scheitel des Trieders . . . . .	55

## Dritter Teil.

**Die orthogonale Axonometrie.**

	Seite
19. Einleitung . . . . .	57
20. Der Zusammenhang zwischen Original und Bild. Einführung gleichwertiger Bildebenen . . . . .	61
21. Spurendreiecke, Distanzpunkte und Distanzkreise der Bildebenen	63
22. Das Spurendreieck der durch einen Punkt gelegten Bildebene	65
23. Die Umlegung der Geraden : . . . . .	67
24. Spuren, Haupt- und Falllinien der Ebene . . . . .	70
25. Die Koordinatenebenen; Ausführung einer speziellen Konstruktion	73
26. Neue Konstruktion der Bilder von Rechtwinkelpaaren der Koordinatenebenen . . . . .	75
27. Die Umlegung der Ebene . . . . .	78
28. Der Spezialfall der orthogonal-axonometrischen Darstellung .	81

**Angewandte Beispiele.**

29. Die Normalebene zu einer Geraden durch einen gegebenen Punkt	84
30. Der senkrechte Abstand zwischen Punkt und Ebene . . . . .	85
31. Der Neigungswinkel zweier Ebenen . . . . .	87
32. Neigungswinkel von Geraden und Ebene und von zwei Geraden	89
33. Abstände von zwei sich kreuzenden Geraden und von zwei parallelen Ebenen . . . . .	90
34. Winkel einer Ebene mit der Koordinatenebene $xy$ . . . . .	91
35. Ebene des Kreises von gegebenem Bilde . . . . .	93
36. Der Berührungskegel einer Kugel; Oskulationskreise in den Scheiteln des Kreisbildes . . . . .	95

## Vierter Teil.

**Die schiefe Axonometrie.**

37. Die Darstellung in schiefer Axonometrie . . . . .	98
38. Das Spurendreieck der Bildebene; Projektionswinkel und Fluchtlinien . . . . .	99
39. Die Schar der parallelen Bildebenen; Zwischendistanzen, Zwischenfluchtlinien . . . . .	101
40. Die Umlegung der Geraden . . . . .	104
41. Die Umlegung der Ebene und der Koordinatenebenen . . . . .	106
42. Die Auflösung der übrigen metrischen Fundamentalaufgaben .	109
43. Tafelnormale Elemente, als Beispiele . . . . .	113
44. Die Kreisprojektion . . . . .	114
45. Von der Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit der Bilder für schiefe und orthogonale Axonometrie . . . . .	116
46. Spezialfälle der schief-axonometrischen Darstellung . . . . .	119



## Fünfter Teil.

**Der Zusammenhang zwischen Objekt, Projektionsrichtung  
und Bild bei der Orthogonalprojektion.**

	Seite
47. Die Abhängigkeit zwischen Objekt, Projektionsrichtung und Bild	126
48. Die Kreisbilder	132
49. Original und Bild eines Polygons; affine ebene Systeme	135
50. Die Erzeugung affiner Systeme durch Orthogonalprojektion	140
51. Lösung einer ersten Fundamentalaufgabe der orthogonalen Axonometrie	145
52. Lösung einer zweiten Fundamentalaufgabe	148
53. Zwei Raumgeraden und ihr kürzester Abstand	154
54. Orthogonalprojektion der körperlichen Ecke mit Polarecke	156

## Sechster Teil.

**Der Zusammenhang zwischen Objekt, Projektionsrichtung  
und Bild bei der schiefen Parallelprojektion.**

55. Die Abhängigkeit zwischen Objekt, Projektionsrichtung und Bild	163
56. Die Kreisbilder	166
57. Das Verhalten ebener Figuren und Klassifikation affiner Systeme	168
58. Folgerungen und Anwendung von Nr. 57	179
59. Koordinierte Spurendreiecke in der schiefen Axonometrie	187
60. Einfache Konstruktion der koordinierten Spurendreiecke	190
61. Spezialfälle, welche bei dieser Konstruktion zu Tage treten	192
62. Der Pohlkesche Fundamentalsatz der schiefen Axonometrie	195
63. Die Bilder einer Raumfigur in Orthogonal-, Parallel- und in Centralprojektion	197
64. Projektion der körperlichen Ecke mit Polarecke	200
65. Verschiedenartige Bilder einer einfachen Raumfigur	205



## Erster Teil.

### Parallelprojektionen ebener Systeme.

---

1. Der Raum lässt sich in folgender Weise auf eine festgedachte Ebene, die Bildebene  $P$ , abbilden. Durch alle seine Punkte  $A^r, B^r, \dots$  legt man gerade Linien, welche einer festen Geraden  $p^r$  parallel sind. Diese Projektionsstrahlen oder projizierenden Linien schneiden  $P$  in den Bildern  $A, B, \dots$  jener Raumpunkte. Die der Geraden  $p^r$  und allen Projektionsstrahlen gemeinsame Richtung nennt man die Projektionsrichtung. (Gewöhnlich werden parallele Geraden als solche von gleicher Richtung und parallele Ebenen als solche von gleicher Stellung bezeichnet.) Um eine Gerade  $g^r$  des Raumes abzubilden, hat man durch sie die mit  $p^r$  parallele Ebene, ihre projizierende Ebene, zu legen und mit dieser die Bildebene zu schneiden. Der Schnitt ist das geradlinige Bild  $g$  der Geraden  $g^r$ .

Ein räumliches Gebilde, das Objekt oder das Original genannt, lässt sich aus Punkten und Geraden, in endlicher oder unendlicher Anzahl, als Elementen, zusammensetzen. Werden die Bilder der Elemente bestimmt, oder, wie man sich ausdrückt, diese Elemente projiziert, so entsteht das Bild des räumlichen Gebildes. Den hier beschriebenen Vorgang und auch das Resultat desselben nennt man die schiefe Parallelprojektion. Das Objekt und sein Bild stehen hierbei in einer solchen Beziehung zu einander, dass ihre Elemente einander paarweise zugeordnet sind. Diese Elementenpaare nennt man entsprechende; einem Elemente des Objektes „entspricht“ sein Bild und umgekehrt.

Die Gesamtheit aller (doppelt) unendlich vielen Punkte  $A^r, B^r, C^r, \dots$  und aller (doppelt) unendlich vielen Geraden

$a', b', c', \dots$  einer Ebene  $E'$  des Raumes wird ein ebenes System genannt. Die Bilder  $A, B, C, \dots; a, b, c, \dots$  aller Elemente des ebenen Systems erfüllen die gesamte Bildebene  $P$  und bilden ebenfalls ein „ebenes System“. Hierbei ist das Entsprechen der Originale und der Bilder aller Elemente ein umkehrbar-eindeutiges. — Beschreibt der Punkt  $P^r$  in  $E'$  eine gerade Reihe vom Träger  $g^r$ , so wird sein Bild  $P$  die gerade Reihe vom Träger  $g$  beschreiben, und umgekehrt. Sind hierbei  $P_1^r, P_2^r, P_3^r, \dots$  verschiedene Lagen, die  $P^r$  bei der Bewegung einnimmt, und  $P_1, P_2, P_3, \dots$  ihre entsprechenden Punkte, so liegen je  $P_1^r$  und  $P_1, P_2^r$  und  $P_2, \dots$  auf Projektionsstrahlen (die sämtlich parallel sind). Andererseits müssen die Träger  $g^r$  und  $g$  in einer projizierenden Ebene liegen, sich somit schneiden oder ausnahmsweise parallel sein. In der projizierenden Ebene  $g^r g$  werden somit die zwei Geraden  $g^r$  und  $g$  durch eine Schar paralleler Linien bezüglich in den Punktepaaren  $P_1^r, P_1; P_2^r, P_2, \dots$  geschnitten. Nach einem elementaren Satze der Planimetrie sind alle entsprechenden Strecken auf  $g^r$  und  $g$  proportional:

$$P_1^r P_2^r : P_1^r P_3^r : P_2^r P_3^r : \dots = P_1 P_2 : P_1 P_3 : P_2 P_3 : \dots$$

Es folgt, dass jede Strecke in  $g^r$  zu ihrer entsprechenden Strecke in  $g$  in einem konstanten Verhältnisse steht. In dieser Beziehung verhalten sich die Reihen  $P_1^r, P_2^r, P_3^r, \dots$  und  $P_1, P_2, P_3, \dots$  wie (unendlich schmale) ähnliche Figuren und deshalb bezeichnet man auch solche Reihen als ähnliche Reihen. Jede Originalreihe ist mit ihrer Bildreihe ähnlich; jedes Teilverhältnis dreier in einer Geraden liegenden Punkte wird durch Parallelprojektion nicht geändert. — Der unendlich ferne Punkt  $P_\infty^r$  der Reihe  $g^r$  liegt auf dem unendlich fernen Projektionsstrahl der projizierenden Ebene  $g^r g$ ; es wird somit der entsprechende Punkt, der unendlich ferne Punkt  $P_\infty$  von  $g$  sein müssen. Die beschriebene Proportionalität zwischen den entsprechenden Strecken auf  $g^r$  und  $g$  bestätigt dieses Resultat, dass die unendlich fernen Punkte von entsprechenden Geraden sich ebenfalls entsprechen. — Es mag noch hinzugefügt werden, dass der  $g^r$  und  $g$

gemeinsame Punkt sich selbst entspricht und dass für parallele Geraden und deren Bilder jene ähnlichen Reihen denselben Zahlenwert des Verhältnisses entsprechender Strecken haben.

Sind ferner  $a^r, b^r, c^r, \dots$  in  $E^r$  Geraden eines Büschels vom Scheitel  $P^r$ , so bilden die entsprechenden Geraden  $a, b, c, \dots$  in  $P$  das Büschel vom Scheitel  $P$ . Die Strahlen beider Büschel sind, als Originale und Bilder, in umkehrbar eindeutiger Zuordnung. Aber es finden zwischen den entsprechenden Winkeln beider Büschel nicht so einfache Beziehungen statt, wie oben zwischen entsprechenden Strecken entsprechender Reihen. — Rückt hier  $P^r$  in  $E^r$  in das Unendliche, so geschieht bezüglich  $P$  in  $P$  dasselbe; beide Büschel verwandeln sich in Scharen paralleler Linien und es folgt, dass parallelen Linien des Originalsystems parallele Linien des Bildsystems entsprechen, und umgekehrt.

Es seien nun  $a_1^r$  parallel zu  $a^r$  und  $a_1$  parallel zu  $a$  zwei entsprechende Linien, welche  $b^r, c^r, d^r, \dots$  und  $b, c, d, \dots$  bezüglich in  $B^r, C^r, D^r, \dots$  und in  $B, C, D, \dots$  schneiden. Darauf sind  $B^r, C^r, D^r, \dots$  und  $B, C, D, \dots$  ähnliche Reihen. Werden endlich die Strahlen  $b, c, d, \dots$  von der mit  $a$  und  $a_1$  parallelen Geraden  $a_2$  in den Punkten,  $B_2, C_2, D_2, \dots$  geschnitten, so sind die Reihen  $B_2, C_2, D_2, \dots$  und  $B, C, D, \dots$ ; also auch die Reihen  $B_2, C_2, D_2, \dots$  und  $B^r, C^r, D^r, \dots$  ähnlich. Schneidet man somit die Strahlen zweier entsprechenden Büschel mit zwei Geraden, welche mit irgend zwei entsprechenden Geraden parallel sind, so bilden die Schnittpunkte zwei ähnliche Reihen. Als derartige Linien darf man nun auch die unendlich fernen  $g_\infty^r$  des Systems  $E^r$  und  $g_\infty$  des Systems  $P$  betrachten, weil dieselben als mit  $a^r$  und  $a$ , oder  $b^r$  und  $b$  usw. parallel liegend anzusehen sind. Diese unendlich fernen Geraden verhalten sich wie irgend zwei entsprechende Linien, welche Träger ähnlicher Reihen sind. Die entsprechenden Punkte von  $g_\infty^r$  und von  $g_\infty$ , mit allen entsprechenden Punkten  $A^r$  und  $A$ ,  $B^r$  und  $B, \dots$  in  $E^r$  und  $P$  liegend, verbunden, liefern die Strahlen der entsprechenden Büschel von diesen genannten Scheiteln. Die Büschel entsprechender Strahlen, aus beliebigen entsprechen-



den Punktepaaen als Scheiteln, gelangen durch Parallelverschiebung zur Deckung.

Nach dem Vorangehenden entsprechen parallelen Geraden ebenfalls parallele Gerade. Da ferner dem Schnittpunkt zweier Geraden der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden und der Verbindungslinie zweier Punkte die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte entspricht, so folgt, dass die Konstruktionen, welche im wesentlichen auf dem Ziehen und Schneiden von parallelen Linien beruhen, durch Projektion nicht verändert werden.

**Anmerkung.** Wenn alle Punkte  $A, B, C, \dots$  eines Trägers  $t$  den Punkten  $A', B', C', \dots$  eines (ebenfalls geradlinigen) Trägers  $t'$  so zugeordnet sind, dass alle entsprechenden Strecken der beiden Träger in demselben Verhältnisse zu einander stehen, so nennt man diese Reihen  $A, B, C, \dots$  und  $A', B', C', \dots$  ähnlich. Kennt man zu zwei Punkten  $A, B$  auf  $t$  ihre entsprechenden  $A', B'$  auf  $t'$ , so lassen sich diese Reihen weiterkonstruieren. Man findet nämlich zu  $C$  auf  $t$  den entsprechenden Punkt,  $C'$  durch die Bedingung  $A'C':B'C' = AC:BC$ , wodurch  $C'$  eindeutig bestimmt ist. In derselben Weise gehört zu einem Punkt auf  $t'$  rückwärts ein ganz bestimmter Punkt auf  $t$ . Die Weiterkonstruktion lässt sich dadurch vereinfachen, dass man  $t$  und  $t'$  so aneinanderlegt, dass zwei entsprechende Punkte, etwa  $A$  und  $A'$ , sich decken; es sind dann die Verbindungslinien aller entsprechenden Punktepaae  $B, B'; C, C'; \dots$  parallel. Bringt man aber  $t$  und  $t'$  in parallele Lage, so gehen die Verbindungslinien aller entsprechenden Punktepaae durch einen und denselben Punkt. — Hat das Verhältniss der entsprechenden Strecken der beiden ähnlichen Reihen den Wert 1, so sind die Reihen gleich. Die eindeutige Zuordnung ihrer Punkte ist durch zwei entsprechende Paare  $A, A'; B, B'$ , mit der Bedingung  $AB = A'B'$  bestimmt.

**2.** Wer die Prinzipien der Massbestimmung des gewöhnlichen (euklidischen) Raumes kennt, weiss, dass das „Messen“ der Strecken in Punktreihen und der Winkel in Strahlen-

büscheln sich keineswegs nach dem Gesetze der Dualität einander gegenüberstellen. Unter den Winkeln aber ist der rechte Winkel durch besondere Umstände ausgezeichnet. Es gelingt, eine Methode für das Messen von Winkeln auszubilden, welche von der Darstellung der Bilder von zwei rechten Winkeln ausgeht.

Zwei Strahlen des ebenen Originalsystems  $E^r$ , die aufeinander senkrecht stehen, sollen ein Rechtwinkelpaar genannt werden. Jedes Strahlbüschel in  $E^r$  enthält unendlich viele Rechtwinkelpaare und durch beliebige Parallelverschiebungen solcher gehen stets wieder Rechtwinkelpaare hervor. Durch die Abbildung der Rechtwinkelpaare entstehen Systeme von Linien, welche einander paarweise zugeordnet sind und wobei es wesentlich nur auf die Richtungen der Strahlen des Paares ankommt, im übrigen aber die Zuordnung eine umkehrbare ist.

Sind  $a, b, c, d$  in  $P$  die Bilder zweier Rechtwinkelpaare (des Systems  $E^r$ ) und verschiebt man beide nach demselben Scheitel  $P$ , so geht nach der Verschiebung  $c$  durch zwei der von  $a$  mit  $b$  gebildeten Scheitelwinkel und  $d$  durch die beiden übrigen. Diese Eigenschaft, die ersichtlich für die Originale  $a^r, b^r; c^r, d^r$  stattfindet, überträgt sich auf das Bild; auch am Originale „trennen sich“ die an denselben Scheitel verlegten Rechtwinkelpaare stets.

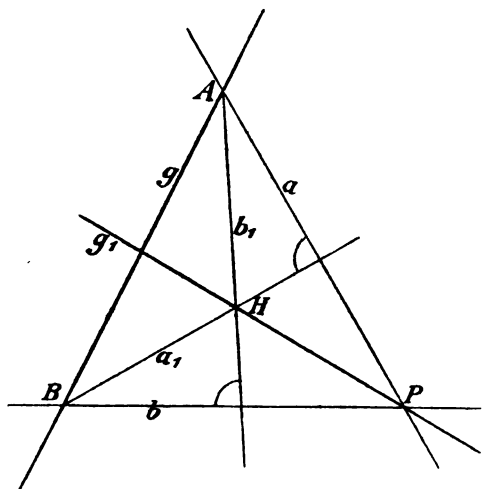
Die beiden Strahlen des Originals wie des Bildes eines Rechtwinkelpaares werden in Zukunft als einander gegenüberliegend bezeichnet. Die einer Geraden des einen oder des anderen dieser Systeme gegenüberliegenden Linien sind parallel.

**3.** Der Satz, dass die drei Höhen eines Dreiecks sich in demselben Punkte (dem „Höhenschnitt“  $H^r$ ) schneiden, liefert eine Konstruktion von Rechtwinkelpaaren, wenn bereits zwei derselben bekannt sind, welche auf dem Ziehen von Parallelen beruht.

Es seien nun die Bilder  $a, a_1; b, b_1$  zweier Rechtwinkelpaare bekannt; man konstruiere das Bild  $g_1$  einer Senkrechten ( $g_1^r$ ) auf die Gerade ( $g^r$ ) vom Bilde  $g$ . Das Bild  $g_1$  soll durch den gegebenen oder beliebig ausserhalb  $g$  gewählten Punkt  $P$  gehen. Zu diesem Zwecke zieht man (Fig. 1) durch  $P$  die Geraden  $a, b$ , für welche die Richtungen der gegenüberliegenden

Linien bekannt sind. Sie mögen  $g$  bezüglich in  $A, B$  schneiden. Durch jeden dieser Punkte zieht man eine Parallele zu dem gegenüberliegenden Strahle des anderen Schnittpunktes, nämlich  $a_1$  durch  $B$  und  $b_1$  durch  $A$ . Diese Linien

Fig. 1.



$a_1$  und  $b_1$  schneiden sich in einem Punkte  $H$ , dessen Verbindungslinie  $PH$  mit  $P$  das Bild  $g_1$  der verlangten Senkrechten ist. Denn es ist ohne Zweifel  $ABP$  das Bild eines Dreiecks und  $H$  das Bild seines Höhenchnittes.

Bei dieser Konstruktion lassen sich die Strahlen eines jeden der

Paare  $a, a_1$  und  $b, b_1$  unter sich vertauschen. Es liessen sich so, bei gegebenem Punkte  $P$ , im ganzen vier Punkte der Geraden  $g_1$  konstruieren. Stets aber hat man durch  $P$  zwei Strahlen zu ziehen, welche zusammen beiden Paaren angehören, und dann durch den Schnittpunkt eines jeden dieser Strahlen, mit  $g$ , eine Parallele zu dem gegenüberliegenden Strahle des anderen der beiden Strahlen zu ziehen. Ihr Schnittpunkt  $H$ , mit  $P$  verbunden, giebt das Bild  $g_1$  der Senkrechten. — Hierbei sind die Punkte  $P$  und  $H$  einander vertauschbar zugeordnet.

Die willkürliche Auswahl, welche hier unter den ursprünglich gegebenen Linien getroffen werden kann, kommt in den Anwendungen sehr zu statten, wenn nämlich die Bilder gewisser Schnittpunkte weit entfernt liegen. — Bei gegebenem  $g$  und  $P$  waren vorhin vier Hilfslinien nötig, um  $g_1$  zu erhalten; handelt es sich aber bloss darum, irgend eine

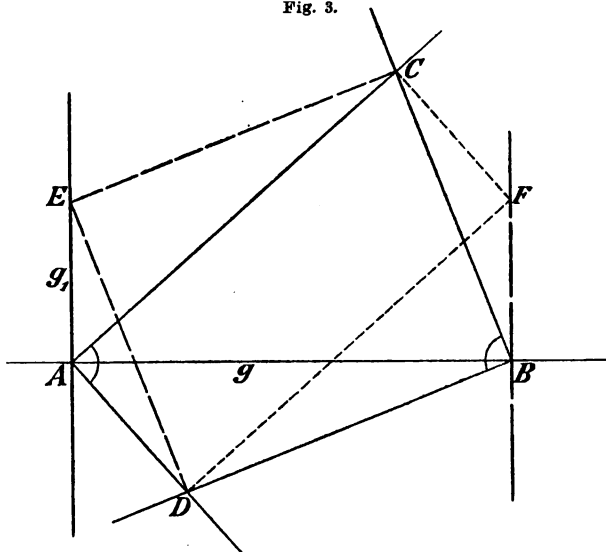
In Fig. 1 bilden  $A, B, P, H$  die Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen drei Gegenseitenpaare die Bilder dreier Rechtwinkelpaare sind. Durch Projektion der Figur des Dreiecks mit seinen Höhentransversalen wird somit der Satz gewonnen: Sind von einem vollständigen Vierecke zwei Gegenseitenpaare die Bilder von Rechtwinkelpaaren des ebenen Systems, so ist auch das dritte Gegenseitenpaar das Bild eines solchen Paares.\* Die Originale wie die Bilder solcher Vierecke sind stets so gestaltet, dass eine Ecke,  $P$  oder  $H$ , innerhalb des von den drei anderen Punkten gebildeten Dreiecks liegt. Es trennen sich dann die nach einem gemeinsamen Scheitel verschobenen Paare.

Fig. 2 stellt die Konstruktion in der Originalebene dar, unter Weglassung der üblichen Bezeichnung  $r$  („räumlich“).

Digitized by Google

Gegeben seien das Rechtwinkelpaar  $a, b$  und die Gerade  $g$ , durch  $O$  gehend. Man verfügt über ein zweites Rechtwinkelpaar  $c, d$ , welches man nach dem beliebigen Punkte  $P$  der Geraden  $g$  verlegt. Nun schneide man  $c$  mit  $a$  in  $Q$ ,  $d$  mit  $b$  in  $R$ , ergänze  $QPR$  zu dem Rechtecke  $QPRS$ , so ist  $OS = g_1$  die in  $O$  auf  $g$  errichtete Senkrechte. Vertauscht

Fig. 3.



man die Rollen von  $c$  und  $d$  miteinander, so entsteht ein zweites Rechteck  $Q_1PR_1S_1$ , wo ebenfalls  $OS_1$  mit  $g_1$  übereinstimmt.

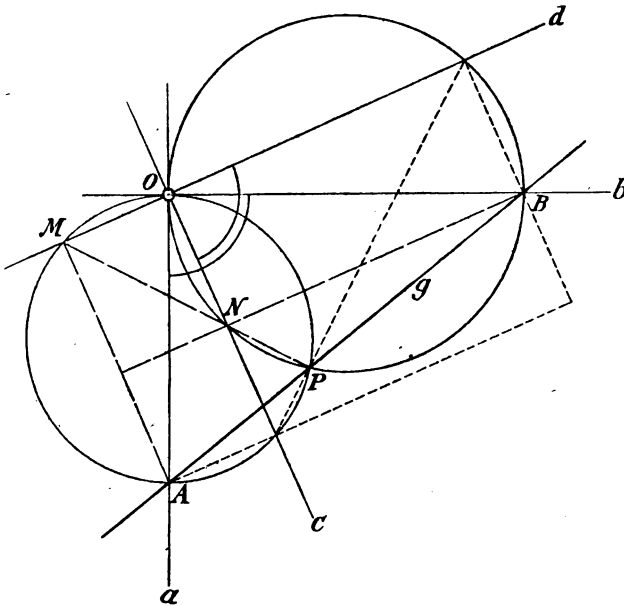
Zum Beweise dieser Eigenschaften beachte man, dass in Fig. 2 der über  $QR$  als Durchmesser beschriebene Kreis durch  $P$  und  $O$  gehen muss. Zieht man darauf  $RS$  parallel mit  $PQ$  und  $QS$  parallel mit  $PR$ , so entsteht das dem Kreise eingeschriebene Rechteck  $QPRS$ , welches  $PS$  zum Durchmesser hat, weshalb endlich  $POS$  ein rechter Winkel sein muss.

Als weiteres Beispiel derartiger Konstruktionen mag hier noch folgendes angeführt werden. In  $g$  (Fig. 3) liegen die Scheitel  $A, B$  zweier Rechtwinkelpaare  $CAD, CBD$ . Ergänzt



man  $CBD$  zu dem Rechtecke  $CBDE$ , so ist  $AE = g_1$  rechtwinklig auf  $g$ . In analoger Weise findet man die in  $B$  auf  $g$  errichtete Senkrechte  $BF$ . — Auch hier ist die in der Originalebene auszuführende Konstruktion (unter Weglassung der Bezeichnung  $r$ ) beschrieben worden. Bei den Bildern dieser Figuren treten Parallelogramme an Stelle der Rechtecke.

Fig. 4.



5. Die zwei Rechtwinkelpaare  $a^r, b^r; c^r, d^r$  seien an demselben Scheitel  $O^r$  vereinigt. Man fälle aus diesem Scheitel auf eine nicht durch ihn gehende Gerade  $g^r$  eine Senkrechte, wobei namentlich der Fußpunkt der Senkrechten bestimmt werden soll.

Fig. 4 giebt die Auflösung für die Originalebene, wieder mit Weglassung des Index  $r$ . Die Gerade  $g$  werde von den beiden Strahlen  $a, b$  desselben Paares in  $A, B$  geschnitten. Legt man durch  $A$  und  $O$  Parallelen zu  $c$  (oder  $d$ ) und durch  $B$  und  $O$  Parallelen zu  $d$  (oder  $c$ ), so entsteht allemal ein Rechteck, dessen nicht durch  $O$  gehende

Diagonale die Gerade  $g$  im Fusspunkte  $P$  der Senkrechten schneidet. Indem man, wie hier angedeutet worden,  $a$  und  $b$  festhält, darauf die Rollen von  $c$  und  $d$  miteinander vertauscht, erhält man zwei solcher Diagonalen durch  $P$ , die jedesmal aufeinander senkrecht stehen; davon geht die eine jedesmal direkt durch  $P$ , die andere in ihrer Verlängerung. (Werden auch die Paare  $a, b$ ;  $c, d$  miteinander vertauscht, so entstehen im ganzen zwei Rechtwinkelpaare vom Scheitel  $P$ .)

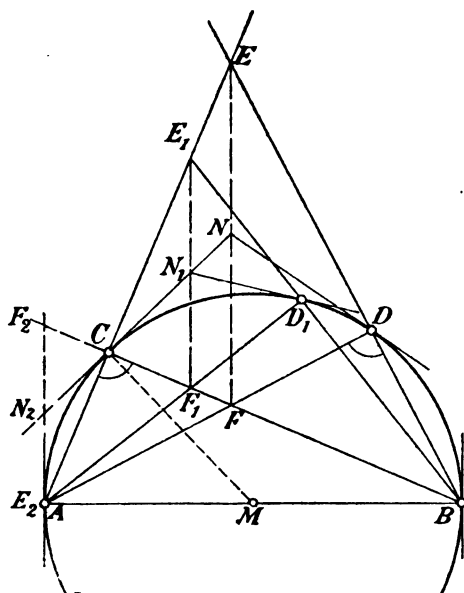
Um die erstgenannte Konstruktion zu beweisen, verzeichne man über  $OA$  und  $OB$  als Durchmesser Kreise. Dieselben schneiden sich unter rechten Winkeln, nämlich zunächst in  $O$  (weil ihre Tangenten  $a, b$  in  $O$  ein Rechtwinkelpaar sind), und zum zweiten Male in dem Fusspunkte  $P$  der aus  $O$  auf die Gerade  $g = AB$  gefällten Senkrechten. (Nämlich es liefert der zweite Schnittpunkt  $P$  beider Kreise, als auf dem ersten Kreise liegend, mit  $A$  und  $O$  verbunden, ein Rechtwinkelpaar, und analog folgt, dass auch  $PB, PO$  ein Rechtwinkelpaar ist. Deshalb fallen  $PA, PB$  in eine Gerade.) Die Gerade  $d$ , durch  $O$  gehend, schneidet den ersteren Kreis in  $M$ ; es haben der Winkel  $MOA$  und die Hälfte des Bogens  $MA$  gleiches Mass. Indem man den zweiten Kreis mit  $c$  (durch  $O$  gehend) in  $N$  schneidet, findet man, dass auch der Winkel  $NOA$  und der halbe Bogen  $ON$  gleiches Mass haben. Es sind somit die Bogen  $MA$  und  $ON$  supplementär und die Winkel  $MPA$  und  $OPN$  komplementär. Da aber  $OPA$  ein rechter Winkel ist, so fallen  $PM, PN$  in einerlei Gerade, w. z. b. w.

6. Als direkte Anwendung der eben behandelten Konstruktion von Rechtwinkelpaaren, aus zwei gegebenen, sollen nachfolgend Konstruktionen des Kreisbildes aus Punkten und Tangenten ausgeführt werden.

a) Eine derartige Konstruktion wird durch folgende Betrachtung über den Originalkreis (unter Weglassung des Index  $r$ ) gewonnen. Es seien (Fig. 5)  $A$  und  $B$  die Endpunkte eines Durchmessers,  $M$  das Centrum und  $C, D$  zwei beliebige Punkte des Kreises. Schneidet man  $AC$  mit  $BD$  in  $E$  und

$AD$  mit  $BC$  in  $F$ , so ist  $F$  der Höhenschnitt des Dreiecks  $ABE$  und es steht  $EF$  auf  $AB$  senkrecht; die Kreistangenten in  $A$  und  $B$  sind mit  $EF$  parallel. Verschiebt man  $EF$  parallel nach  $E_1F_1$ , so schneiden sich  $AF_1$  und  $BE_1$  in dem Punkte  $D_1$  des Kreises. Es lassen sich somit die zweiten Schnittpunkte aller durch  $A$  oder  $B$  gezogenen Linien mit dem Kreise mit Hilfe

Fig. 5.



von Geraden, die mit  $EF$  parallel sind, konstruieren. — Die Dreiecke  $ABC$  und  $FEC$  sind ähnlich; ihre entsprechenden Seiten stehen aufeinander senkrecht. Diese Dreiecke bestimmen ähnliche Systeme, wobei sich namentlich die Mittelpunkte  $M$  von  $AB$  und  $N$  von  $EF$  entsprechen. Also sind auch  $MC$ ,  $NC$  ein Rechtwinkelpaar,  $NC$  ist somit die Tangente des Kreises im

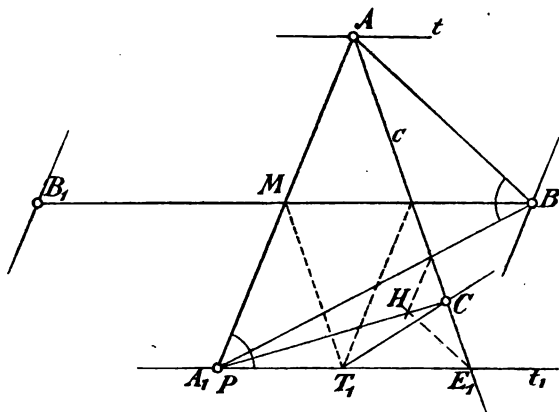
Punkte  $C$ . Ebenso ist  $ND$  die Kreistangente vom Berührungspunkte  $D$ . Und die Mitte  $N_1$  von  $E_1F_1$ , auf  $CN$  liegend, ist wiederum der Schnittpunkt der Kreistangenten in  $C$  und  $D_1$ .

Durch Projektion dieser Figur entsteht Fig. 6. Gegeben sind der Durchmesser  $AB$  und die beliebigen Punkte  $C$ ,  $D$  des Kreisbildes. Durch den Schnitt von  $AC$  mit  $BD$  und von  $AD$  mit  $BC$  entstehen  $E$  und  $F$ . Es ist  $EF$  die Richtung des konjugierten Durchmessers des Kreisbildes; die Tangenten in  $A$  und  $B$  sind mit  $EF$  parallel. Die Mitte  $N$ , von  $EF$  mit  $C$  und  $D$  verbunden, giebt die Tangenten in diesen Punkten. Zieht man nun durch  $A$  den Strahl  $x$ , welcher  $BC$



paare. Zu  $c$ , aus  $A$  gezogen, soll die gegenüberliegende Linie, durch  $A_1$  gezogen, bestimmt werden. Nach Nr. 3 schneidet man  $c$  mit  $A_1B$ , zieht daselbst eine Parallele mit  $AA_1$ , dann schneidet man  $c$  mit  $t_1$  und zieht aus dem Schnittpunkt eine Parallele mit  $AB$ . Es entsteht der Schnittpunkt  $H$ , wobei  $A_1H$  die gesuchte,  $c$  gegenüberliegende Linie ist. Sie schneidet  $c$  in dem Punkte  $C$  des Kreisbildes. — Verbindet man noch

Fig. 7.



$C$  mit der Mitte  $T_1$  von  $A_1E_1$ , so entsteht die Tangente des Punktes  $C$ . (Die Figur zeigt, wie diese Mitte erhalten wird; der Beweis der Richtigkeit der gegebenen Konstruktion der Tangente in  $C$  wird am einfachsten durch den Übergang zu der Originalfigur erbracht. Dabei beachte man die ähnlichen Systeme  $A_1T_1E_1C^r$  und  $A^rM^rA_1^rC^r$ , welche sich in rechtwinkliger Lage zu einander befinden, den Parallelismus von  $M^rT_1^r$  mit  $A^rC^r$ , u. s. f.)

Fig. 8 giebt eine von der eben besprochenen nur wenig verschiedene Konstruktion des Kreisbildes. Zu dem Durchmesser  $AA_1$  ist der halbe konjugierte  $MB$  gegeben. Dann verfügt man wieder über die beiden Rechtwinkelpaarbilder  $AB, A_1B; AA_1, t_1$ . Den aus  $A$  willkürlich gezogenen Strahl  $c$  schneidet man mit  $A_1B$  in  $H$ , zieht aus  $H$  eine Parallele zu  $MB$  bis  $P$  in  $AB$ , verbindet endlich  $P$  mit  $A_1$ . Der Schnittpunkt von  $c$  mit  $A_1P$  gehört dem Kreisbilde an; denn es ist offenbar  $AC, A_1C$

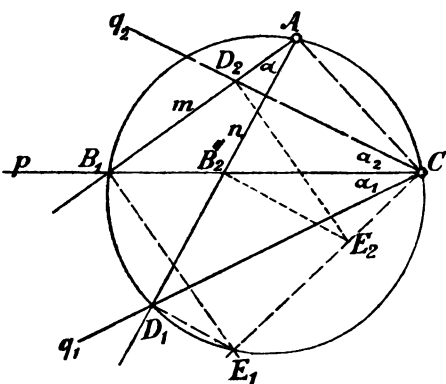


bindungslinien der drei Gegeneckenpaare eines dem Kreise bezüglich seinem Bilde umschriebenen Sechseits in demselben Punkte. Nach diesem Satze kann man, wenn fünf Tangenten des Bildes bekannt sind, alle übrigen linear konstruieren.\* — Diese Sätze ergeben auch die Tangenten in den gegebenen Punkten, bezüglich die Berührungspunkte der gegebenen Tangenten.

7. Sind die Bilder zweier Rechtwinkelpaare bekannt, so lassen sich sämtliche Bilder solcher Paare leicht konstruieren (Nr. 3—5). Beispielsweise lassen sich alle konjugierten Durchmesserpaare des Kreisbildes finden, wenn zwei derselben bereits bekannt sind. Es soll nun gezeigt werden, dass man unter derselben Voraussetzung die Bilder von gleich grossen Winkeln, von beliebiger Lage in der Originelebene, verzeichnen kann.

Fig. 9 stellt eine derartige Konstruktion in der Originelebene dar, welche auf dem Ziehen von Senkrechten und von Parallelen zu gegebenen Linien beruht. Der Winkel  $\alpha$ , welcher  $m$  zum Anfangs-,  $n$  zum

Fig. 9.



Endschenkel und  $A$  zum Scheitel hat, soll an dem neuen Scheitel  $C$ , mit  $p$  als Anfangsschenkel, aufgetragen werden. (Der Index  $r$  soll hier ebenfalls wieder unterdrückt werden.) Schneiden sich die Anfangsschenkel des gegebenen und des gesuchten Winkels in  $B_1$  und denkt man sich durch  $A$ ,  $B_1$ ,  $C$  einen Kreis gelegt, so müssen sich auch die Endschenkel  $n$ ,  $q_1$  auf demselben schneiden. Es genügt hierbei, den zweiten Schnittpunkt  $D_1$  des Endschenkels  $n$  mit dem Kreise zu finden.

\* Elementare Beweise dieser Sätze finden sich u. A. in Adams: Die Lehre von den Transversalen, Lehrsätze LXXVII flg.

Zu diesem Zwecke zieht man in  $B_1$  zu  $AB_1$  und in  $C$  zu  $AC$  die zwei Senkrechten, welche sich in  $E_1$  schneiden. Der Fusspunkt des aus  $E_1$  auf  $n$  gefällten Lotes muss der Punkt  $D_1$  sein. Seine Verbindungslinie mit  $C$  ist der gesuchte Endschenkel des mit  $\alpha$  gleichen Winkels  $\alpha_1$ . Diese Lösung der Aufgabe ist eine eindeutige. — Neben  $\alpha_1$  mit  $p$  als Anfangs- und  $q_1$  als Endschenkel giebt es noch einen Winkel  $\alpha_2$ , von gleicher Grösse wie  $\alpha$ , mit  $p$  als Endschenkel. Um den Anfangsschenkel  $q_2$  zu finden, denkt man sich einen Kreis durch  $A, C$  und den Schnittpunkt  $B_2$  der Endschenkel der Winkel  $\alpha, \alpha_2$  gelegt. Der Schnittpunkt  $D_2$  dieses Kreises mit  $m$  wird in analoger Weise konstruiert, wie oben der Schnittpunkt  $D_1$ . Endlich wird  $CD_2 = q_2$  der gesuchte Anfangsschenkel sein.

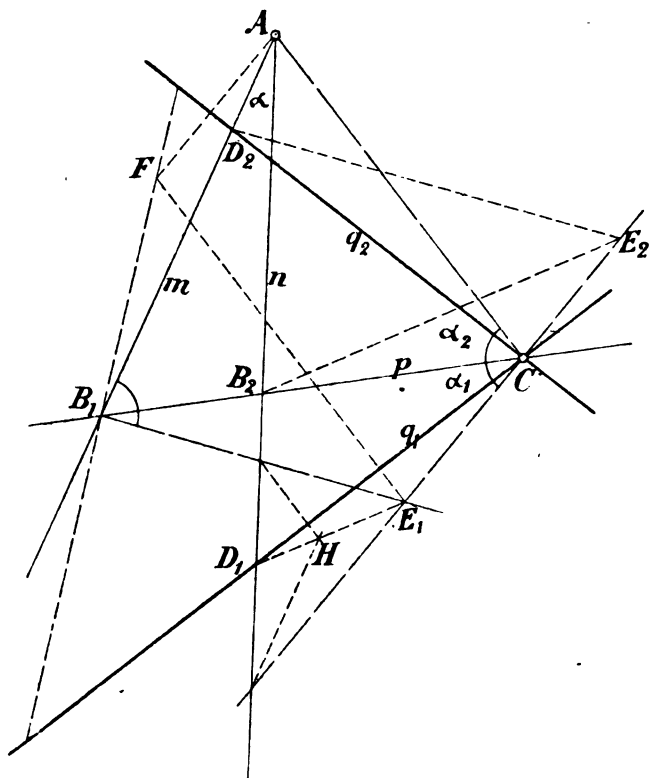
Fig. 10 (S. 17) giebt nun die Ausführung der genannten Konstruktionen in der Bildebene  $P$  selbst. Gegeben seien die Bilder  $\alpha, A, m, n, C, p$  des Winkels  $\alpha^r$ , seines Scheitels  $A^r$ , u. s. f.; ferner sollen die Richtungen der den Linien  $m$  und  $AC$  gegenüberliegenden Linien bekannt sein. — Es sei  $p$  das Bild des Anfangsschenkels des mit  $\alpha^r$  gleichen Winkels  $\alpha_1^r$ . Im Schnittpunkt  $B_1$  von  $p$  mit  $m$  ziehe man die  $m$  gegenüberliegende Linie  $B_1E_1$  und in  $C$  die  $AC$  gegenüberliegende  $CE_1$ . Die aus ihrem Schnittpunkte  $E_1$  gezogene,  $n$  gegenüberliegende Linie muss nach Nr. 3 mit  $E_1HD_1$  übereinstimmen. Darauf ist  $D_1C = q_1$  der Endschenkel von  $\alpha_1$ . — Hierauf soll  $p$  der Endschenkel des Winkels  $\alpha_2$  (mit  $\alpha_2^r = \alpha^r$ ) sein. Man ziehe im Schnittpunkte  $B_2$  von  $p$  mit  $n$  den dem Strahle  $n$  gegenüberliegenden  $B_2E_2$ , welcher mit  $D_1E_1$  parallel läuft, schneide den gegenüberliegenden Strahl  $CE_1 = CE_2$  von  $AC$  in  $E_2$ . Aus  $E_2$  zieht man den  $m$  gegenüberliegenden Strahl  $E_2D_2$ , also eine Parallele zu  $B_1E_1$ , welcher  $m$  in  $D_2$  schneidet. Schliesslich ist nun  $CD_2 = q_2$  der gesuchte Anfangsschenkel des Winkels  $\alpha_2$ .

In Fig. 10 hat man mit  $CA, CE_1$  als benachbarten Seiten das Parallelogramm  $ACE_1F$  konstruiert. Dann ist, nach Nr. 4 mit Fig. 3,  $FB_1$  eine  $p$  gegenüberliegende Linie. Wenn man daher  $q_1$  und  $q_2$  mit  $FB_1$  schneidet, so wird  $B_1$



in der Mitte zwischen diesen Schnittpunkten liegen. Im Originalsystem liegen nämlich  $q_1^r, q_2^r$  orthogonal-symmetrisch zu  $p^r$ . — Die Richtung der  $p$  gegenüberliegenden Strahlen erhält man zum zweiten Male, wenn man  $ACE_2$  zum Paral-

Fig. 10.

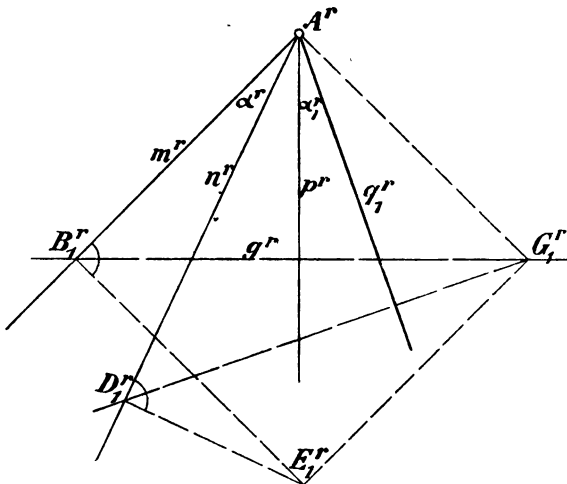


lelogramm ergänzt und den vierten Eckpunkt mit  $B_2$  verbindet.

Es soll noch die Aufgabe behandelt werden, gleich grosse Winkel  $\alpha^r, \alpha_1^r, \alpha_2^r$  an demselben Scheitel  $A^r$  des Originalsystems darzustellen. Mit anderen Worten soll der Winkel  $\alpha^r$  um seinen Scheitel so gedreht werden, dass einer seiner Schenkel in die beliebig durch  $A^r$  gezogene Gerade  $p^r$  fällt. — Fig. 11 stellt die in der Originalebene auszuführende

Konstruktion dar. Der gegebene Winkel  $\alpha^r$  habe  $m^r$  zum Anfangs- und  $n^r$  zum Endschenkel. Es soll  $p^r$  der Anfangsschenkel des mit  $\alpha^r$  gleichen Winkels  $\alpha_1^r$  sein. Man schneide  $m^r$  mit der auf  $p^r$  errichteten Senkrechten  $g^r$  in  $B_1^r$ . In  $A^r$  errichte man auf  $m^r$  die Senkrechte  $A^r G_1^r$ , welche  $g^r$  in  $G_1^r$  schneidet. Nun ergänze man  $B_1^r A^r G_1^r$  zu dem Rechtecke mit der vierten Ecke  $E_1^r$ . Der Fusspunkt der aus  $E_1^r$  auf  $n^r$  gefällten Senkrechten sei  $D_1^r$ . Dann ist der Winkel  $B_1^r G_1^r D_1^r$  dem Winkel  $\alpha^r$  gleich und es erübrigt, aus  $A^r$  auf  $D_1^r G_1^r$  die

Fig. 11.



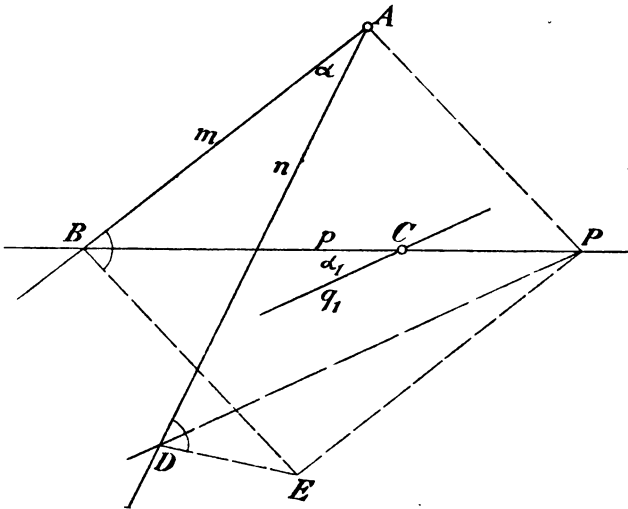
Senkrechte  $q_1^r$ , als Endschenkel von  $\alpha_1^r$ , zu fallen. — Vertauscht man bei dieser Konstruktion  $m^r$  und  $n^r$  miteinander, so würde man einen Winkel  $\alpha_2^r$  mit den Schenkeln  $q_2^r$  und  $p^r$  finden, welcher gleich ist mit  $\alpha^r$  und  $p^r$  zum Endschenkel hat.

Schliesslich gelangt man so zu einer einfacheren Auflösung der in Fig. 10 behandelten Aufgabe. Fig. 12 stellt die in der Bildebene auszuführende Konstruktion dar. Der Winkel  $(m, n)$  oder  $\alpha$ , vom Scheitel  $A$ , soll nach  $C$  übertragen werden mit  $p$ , entsprechend  $m$ , als Anfangsschenkel. Man konstruiere den Endschenkel  $q_1$  des Bildes. — Man schneidet  $p$  mit der durch  $A$  gezogenen,  $m$  gegenüberliegenden Linie in  $P$

und ergänzt  $AB, AP$  zu dem Parallelogramm  $BAP E$ . Durch  $E$  zieht man die  $n$  gegenüberliegende Linie  $ED$ , welche  $n$  in  $D$  trifft. Die durch  $C$  zu  $PD$  gezogene Parallele  $q_1$  ist der gesuchte Endschenkel des Winkels  $\alpha_1$ . — Für die Konstruktion des Anfangsschenkels  $q_2$  des Winkels  $\alpha_2$  hätte man oben  $m$  mit  $n$  zu vertauschen.

Die Darstellung von zwei gleichen Winkeln  $\alpha_1^r, \alpha_2^r$  von demselben Scheitel  $A^r$  und einem gemeinsamen Schenkel  $n^r$  ist bereits

**Fig. 12.**

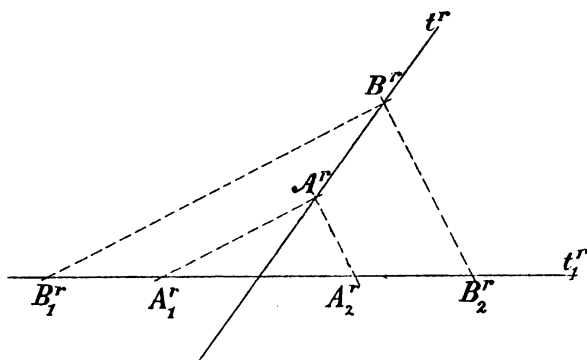


erwähnt worden. Die übrigen Schenkel,  $m'$  von  $\alpha'_1$  und  $p'$  von  $\alpha'_2$ , liegen zu  $n'$  orthogonal-symmetrisch. Im Bilde wird daher eine  $n$  gegenüberliegende Linie  $g$  zwischen  $m$  und  $n$ , bezüglich  $n$  und  $p$ , gleiche Abschnitte haben müssen; orthogonale Symmetrie des Originalsystems geht durch Projektion in schiefe Symmetrie über. — Als Umkehrung dieser eben besprochenen Aufgabe hat man die Bestimmung der Halbierungslinie eines gegebenen Winkels  $\alpha''$ ; indessen ist die Lösung nicht umkehrbar. Die von den Schenkeln  $m'', n''$  gebildeten Winkel werden durch zwei rechtwinklige Geraden halbiert, deren Bilder gegenüberliegende Linien sind. Eine Konstruktion, welche die eine dieser Linien liefert, muss die andere als zweite Lösung

mitergeben. Die Winkelhalbierung ist eine Aufgabe zweiten Grades, welche in Nr. 9 gelöst werden wird.

8. Gleichlange Strecken, auf demselben Träger oder auf parallelen Trägern liegend, projizieren sich wieder als gleichlange Strecken. Dagegen haben offenbar gleichlange Strecken, die auf nicht parallelen Trägern liegen, Bilder von ungleicher Länge. Nachfolgend soll der Versuch gemacht werden, gegebene Strecken auf andere Träger zu übertragen, wobei die in der Originalebene auszuführenden Konstruktionen auf dem

Fig. 13.

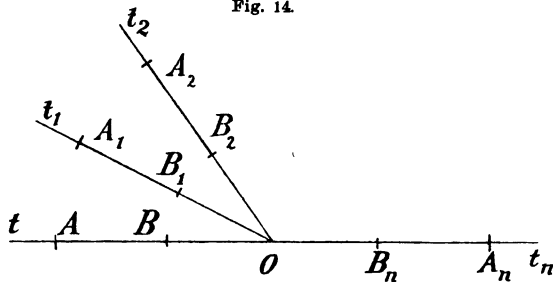


Ziehen und Schneiden von parallelen und senkrechten Linien beruhen sollen.

In der Originalebene soll die auf dem Träger  $t^r$  gegebene Strecke  $A^r B^r$  mit einem beliebigen Anfangspunkte in dem Träger  $t_1^r$  abgetragen werden. Man ziehe (Fig. 13) durch  $A^r$  und  $B^r$  Linien, welche mit der einen oder der anderen der Halbierungslinien der von  $t^r$  mit  $t_1^r$  gebildeten Winkel parallel sind. Die Schnittpunkte dieser Hilfslinien mit dem neuen Träger  $t_1^r$  bestimmen die mit  $A^r B^r$  gleichlangen Strecken  $A_1^r B_1^r$  und  $A_2^r B_2^r$ . Verschiebt man diese gleichen Strecken, welche offenbar unter sich entgegengesetzten Sinnes sind, in  $t_1^r$  so, dass ihre Anfangspunkte  $A_1^r$  und  $A_2^r$  in den gegebenen Anfangspunkt fallen, so ist die Aufgabe gelöst. Hiernach steht das Übertragen gleicher Längen auf andere Träger mit der Halbierung des Winkels auf gleicher Stufe.

Eine andere Konstruktion, die zu demselben Resultate führt, ist die folgende. Es seien  $A^r B^r$  in  $t^r$  und  $A_1^r B_1^r$  in  $t_1^r$  zwei gleichlange Strecken (des Originalsystems). Die aus  $A_1^r$  zu  $t^r$  und die aus  $A^r$  zu  $t_1^r$  gezogenen Parallelen mögen sich in dem Punkte  $P^r$  schneiden. Legt man ebenso die Parallelen aus  $B_1^r$  zu  $t^r$  und aus  $B^r$  zu  $t_1^r$ , so werden sie sich in einem Punkte  $Q^r$  schneiden. Hierbei ist die Verbindungslinie  $P^r Q^r$  einer der beiden Linien parallel, welche die von  $t^r$  mit  $t_1^r$  gebildeten Winkel halbieren. — Wenn man ferner in  $A^r$  und  $B^r$  auf  $t^r$  und in  $A_1^r$  und  $B_1^r$  auf  $t_1^r$  Perpendikel errichtet, so schneiden sie sich in den Ecken eines Rhombus, dessen Diagonalen ebenfalls jenen Winkelhalbierenden parallel sind.

Fig. 14.



Anmerkung. Die Unterscheidung der beiden Schenkel eines Winkels als Anfangsschenkel und als Endschenkel ist gleichbedeutend mit der Festsetzung des Sinnes dieses Winkels. Hat man für irgend zwei Winkel desselben ebenen Systems den Sinn beliebig, unabhängig voneinander gewählt, so kann man unmittelbar entscheiden, ob die Winkel gleichen oder ungleichen Sinnes sind. (Es handelt sich hier selbstverständlich nur um Winkel, welche gezeichnet vorliegen.)

Bei jeder Strecke bedeutet die Festsetzung des Sinnes die Unterscheidung des Anfangs- und Endpunktes. Liegen beliebige Strecken auf demselben Träger, oder auf parallelen Trägern, so lässt sich angeben, ob sie paarweise gleichen, oder entgegengesetzten Sinnes sind. Diese Unterscheidung ist unmöglich, wenn die Strecken nicht parallelen Trägern angehören. Der Beweis soll durch folgende Auffassung von Fig. 14 erbracht werden. Man drehe die Strecke  $AB$  (irgend eines ebenen Systems) um den auf ihrem Träger  $t$  gelegenen Punkt  $O$ .

Der Träger und die Strecke gelangen hierbei successive nach  $t_1, A_1 B_1; t_2, A_2 B_2; \dots t_n, A_n B_n$ . Angenommen es hätten die Strecken  $AB, A_1 B_1, A_2 B_2, \dots$  einerlei Sinn, so würde bei der halben Umdrehung des Trägers  $t$  um  $O$  eine Strecke  $A_n B_n$  entstehen, welche nach der Voraussetzung mit  $AB$  einerlei Sinn, in Wirklichkeit aber den entgegengesetzten Sinn hat (gleichgültig ob der Drehpunkt  $O$  auf der Strecke, oder in deren Verlängerung gewählt wird).

9. Sind die Bilder zweier Rechtwinkelpaare des ebenen Originalsystems  $E^r$  bekannt, so lassen sich alle übrigen bestimmen (Nr. 3—5). Diese Aufgabe soll hier durch das Ziehen von Kreisen gelöst werden. Diese neue Auflösung führt auf die in der Bildebene auszuführende Messung (und Teilung) der Winkel, auf die Übertragung gegebener Strecken auf andere Träger, überhaupt auf die Konstruktion von Systemen, die dem Originalsystem ähnlich sind, u. s. f.

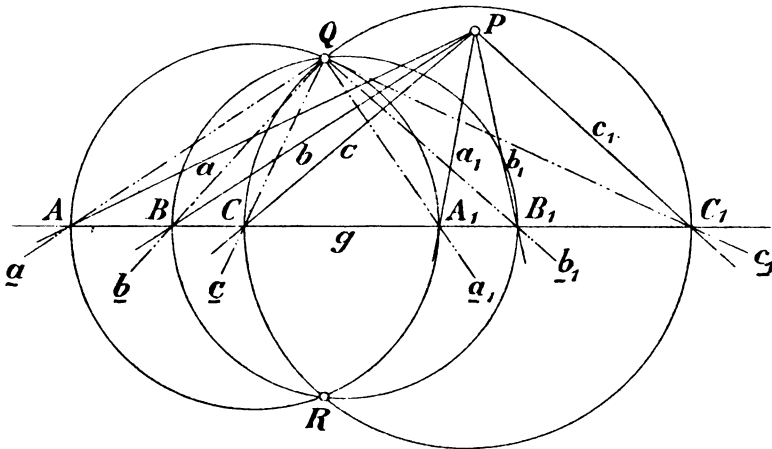
In dem Originalsysteme  $E^r$  seien  $a^r, b^r, c^r, \dots$  die Strahlen eines Büschels vom Scheitel  $P^r$ ;  $a_1^r, b_1^r, c_1^r, \dots$  die auf jenen Strahlen senkrecht stehenden desselben Büschels. Man wähle irgend eine Gerade  $g^r$ , nicht durch  $P^r$  gehend, welche jene Strahlen bezüglich in den Punkten  $A^r, B^r, C^r, \dots A_1^r, B_1^r, C_1^r, \dots$  schneidet. Legt man über den Strecken  $A^r A_1^r, B^r B_1^r, C^r C_1^r, \dots$  als Durchmesser Kreise, so werden sich dieselben sämtlich in  $P^r$  und dem orthogonal-symmetrischen Punkt von  $P^r$  in Bezug auf  $g^r$  schneiden. Die Gesamtheit dieser Kreise wird ein Kreisbüschel genannt.

Nun projiziere man das System  $E^r$  mit beliebig gewählter Projektionsrichtung auf die Bildebene  $P$ . Das Bild der Doppelreihe  $A^r, B^r, \dots; A_1^r, B_1^r, \dots$  in  $g^r$  wird die damit ähnliche (Nr. 1) Doppelreihe  $A, B, \dots; A_1, B_1, \dots$  der Bildgeraden  $g$  sein. Die Projektion des Scheitels  $P^r$  sei der Punkt  $P$ . In der Bildebene verzeichne man über den Strecken  $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$  als Durchmesser ebenfalls Kreise. Die Figur, welche aus den Paaren  $A, A_1; B, B_1; \dots$  und dem System der zuletzt genannten Kreise besteht, ist der in  $E^r$  liegenden Figur ähnlich; die Figur in der Bildebene ist eine ähnliche Nachbildung der

bezüglich, in der Originalebene liegenden Figur. Deshalb müssen sich die in der Bildebene verzeichneten Kreise in zwei Punkten  $Q, R$  schneiden, welche zu der Geraden  $g$  orthogonal-symmetrisch liegen (Fig. 15). Die Verbindungsstrahlen des Punktes  $P$  mit den Paaren  $A, A_1; B, B_1; \dots$  sind die Bilder von Rechtwinkelpaaren (wovon späterhin direkter Gebrauch gemacht werden soll).

Aus der Ähnlichkeit der beiden Figuren in  $E'$  und in  $P$  folgt weiter, dass auch die Dreiecke  $ABQ, BCQ, \dots$  und

Fig. 15.



$ABR, BCR, \dots$  den Dreiecken  $A'B'P', B'C'P', \dots$  ähnlich sind. Bezeichnet man, wie in Fig. 15, die Verbindungsstrahlen von  $Q$  (oder  $R$ ) mit  $A, B, \dots A_1, B_1, \dots$  durch  $\underline{a}, \underline{b}, \dots \underline{a_1}, \underline{b_1}, \dots$ , so gilt allgemein der Satz: Die von den Strahlen  $\underline{a}, \underline{b}, \dots \underline{a_1}, \underline{b_1}, \dots$  unter sich und mit  $g$  gebildeten Winkel stimmen mit denjenigen Winkeln, welche die Geraden  $\underline{a'}, \underline{b'}, \dots \underline{a'_1}, \underline{b'_1}, \dots$  unter sich und mit  $g'$  einschliessen, überein.

Von den Punkten  $Q, R$  liege  $Q$  mit  $P$  stets auf derselben Seite von  $g$ , dann sind  $R$  und  $P$  auf entgegengesetzter Seite von  $g$  gelegen. Sind  $\underline{a}, \underline{b}, \dots$  die Verbindungslinien von  $Q$  mit  $A, B, \dots$ , so haben alle die Winkel  $\underline{ab}, \underline{bc}, \dots$  mit den

Bildern  $ab, bc, \dots$  einerlei Sinn. Sind dagegen  $\underline{a}, \underline{b}, \dots$  die Verbindungslinien von  $R$  mit  $A, B, \dots$ , so haben sämtliche Winkel  $\underline{ab}, \underline{bc}, \dots$  mit  $ab, bc, \dots$  entgegengesetzten Sinn. Da endlich bei der Parallelprojektion ein unendlich fernes „Auge“ (Projektionscentrum) vorausgesetzt wird, so werden, von demselben aus gesehen, die entsprechenden Strahlen aus  $P^r$  und aus  $Q$  bezüglich gleiche Winkel einerlei Sinnes miteinander bilden, die entsprechenden Strahlen der Büschel  $P^r$  und  $R$  aber gleiche Winkel entgegengesetzten Sinnes.

Hierdurch ist das Problem des Messens und des Teilens von Winkeln für jede Parallelprojektion eines ebenen Systems allgemein gelöst, wenn man nur die Bilder von zwei (unabhängigen) Rechtwinkelpaaren kennt. Die erforderlichen Konstruktionen in der Bildebene sind sehr einfach und die Erklärung setzt nur die Kenntnis der Ähnlichkeit der Figuren voraus. — Will man beispielsweise die Halbierungslinien der von  $a^r$  mit  $b^r$  gebildeten Winkel in Fig. 15 darstellen, so halbiere man die von  $QA$  und  $QB$  (oder von  $RA$  und  $RB$ ) gebildeten Winkel, schneide  $g$  mit diesen Winkelhalbierenden und verbinde diese Schnittpunkte mit  $P$ , so entstehen die Bilder der gesuchten Halbierungslinien.

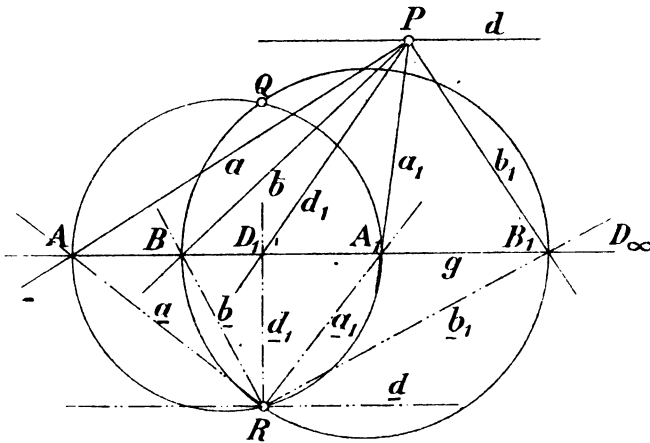
Die Lage der Hilfslinie  $g$  ist eine ganz beliebige, nur soll  $g$  zunächst nicht durch  $P$  gezogen werden. — Stets wird  $g$  einer durch  $P$  gehenden Geraden  $d$  parallel sein, es sei  $d_1$  die gegenüberliegende (Fig. 16 [S. 25]). Irgend zwei gegenüberliegende Linien  $a, a_1$  durch  $P$  schneiden  $g$  in  $A, A_1$  und der über  $AA_1$  als Durchmesser gelegte Kreis geht durch  $Q$  und  $R$ . Das Paar  $b, b_1$  liefert einen zweiten durch  $Q$  und  $R$  gehenden Kreis. Für das Paar  $dd_1$  aber fällt  $D$  in  $g$  unendlich fern und der Hilfskreis, über  $DD_1$  als Durchmesser, verwandelt sich in die in  $D_1$  auf  $g$  errichtete Senkrechte, welche ebenfalls durch  $Q$  und  $R$  gehen muss.

10. Die in vorangehender Nummer ausgeführte Konstruktion kann auf alle Punkte  $P, P_1, P_2, \dots$  des Bildes ausgedehnt werden. Durch die willkürliche Hilfsgerade  $g$  werden dem



einzelnen Punkte  $P$  jedesmal zwei Punkte  $Q, R$  zugeordnet. Die zugeordneten Punkte von  $P_1, P_2, \dots$  sind bezüglich  $Q_1, R_1; Q_2, R_2, \dots$ . Durch Ausdehnung des Verfahrens auf alle Punkte  $P, P_1, P_2, \dots$  des Bildsystems entstehen dessen zugeordneten Systeme  $Q, Q_1, Q_2, \dots$  und  $R, R_1, R_2, \dots$ , ebenfalls in der Bildebene  $P$  liegend. Die Hilfsgerade  $g$ , welche hierbei festliegend gedacht ist, soll fortan die „Anschlusslinie“ oder die Anschlussgerade genannt werden.

Fig. 16.



Nach Nr. 9 bilden die Linien  $QA, QB, QC, \dots$  oder  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$ , welche den Punkt  $Q$  mit den Punkten  $A, B, C, \dots$  von  $g$  verbinden, unter sich und mit  $g$  dieselben Winkel, welche die Originale  $a, b, c, \dots$  unter sich und mit  $g$  einschliessen. Unter diesen Linien sind aber auch  $QQ_1, QQ_2, \dots$  enthalten, deren Winkel mit den von den Geraden  $PrP_1, PrP_2, \dots$  eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen. Dieselbe Eigenschaft findet statt bezüglich der Linien  $Q_1Q, Q_1Q_2, \dots$  und deren Originale  $P_1Pr, P_1P_2, \dots$ ; es folgt, dass alle von den Verbindungslinien der Punkte  $Q, Q_1, Q_2, \dots$  gebildeten Winkel mit den von den entsprechenden Verbindungslinien der Punkte  $Pr, P_1, P_2, \dots$  gebildeten Winkeln übereinstimmen. Zu diesen Systemen darf man auch  $g$ , bezüglich  $g$  hinzunehmen, indem auch die Verbindungslinien der Punkte  $Q$  mit

der Geraden  $g$  genau dieselben Winkel bilden, wie die Verbindungslinien der Punkte  $P^r$  mit der Geraden  $g^r$ . — Das System  $Q, Q_1, Q_2, \dots, g$  darf man durch das mit ihm kongruente  $R, R_1, R_2, \dots, g$  ersetzen und es folgt: Die beiden dem Bildsysteme  $P, P_1, P_2, \dots$  zugeordneten Systeme  $Q, Q_1, Q_2, \dots$  und  $R, R_1, R_2, \dots$  sind dem Originalsystem  $P^r, P_1^r, P_2^r, \dots$  *ähnlich*; im ersten, bezüglich im zweiten, zugeordneten System haben alle Winkel mit den entsprechenden des Originalsystems gleichen, bezüglich entgegengesetzten Sinn. — Der Einfachheit halber sollen künftig diese vier ebenen Systeme kurz als das Originalsystem oder das System  $P^r$  oder  $E^r$  das Bildsystem  $P$  und die dem letzteren zugeordneten Systeme  $Q$  und  $R$  bezeichnet werden; für alle diese Systeme tritt hier der Punkt als Element auf. Die Systeme sind sämtlich aus Punkten, die sich überall eindeutig entsprechen, zusammengesetzt gedacht. Die zugeordneten Systeme, unter sich kongruent, beziehungsweise orthogonal-symmetrisch in Bezug auf die Anschlusslinie als Axe, sind dem Originalsysteme ähnlich. Es soll nun die Beziehung zwischen dem Bildsystem und jedem seiner zugeordneten Systeme behandelt werden.

Bei dieser Untersuchung ist das in Fig. 15 eingeschlagene Verfahren massgebend. Indem man den Punkt  $P$  beliebig bewegt, setze man erst voraus, dass er in die Anschlusslinie  $g$  falle. Es werden sich dann die Strecken  $AA_1, BB_1, \dots$  auf Null reduzieren und  $P$  mit  $Q$  und  $R$  in demselben Punkte von  $g$  vereinigen. Die Gerade  $g$  besteht somit aus selbstentsprechenden Punkten aller drei Systeme  $P, Q$  und  $R$ . — Bewegt sich  $P$  auf dem Strahle  $a$ , so müssen sich  $Q$  und  $R$  auf den bezüglich Strahlen  $a$ , nämlich auf  $QA$  oder  $RA$  fortbewegen. Denn der von  $a$  mit  $g$  gebildete Winkel ist das Bild des von  $a^r$  mit  $g^r$  gebildeten Winkels und letzterer muss nach früherem mit den von  $g$  und  $AQ$ , bezüglich von  $g$  und  $AR$  gebildeten Winkeln übereinstimmen; bei der angegebenen Bewegung ändern sich jene Winkel und ihre Anfangsschenkel nicht, weshalb auch die Endschenkel festbleiben müssen. Es sind somit  $PA$  und  $QA$ ,  $PB$  und  $QB$  u. s. f. entsprechende Geraden der

Systeme  $P$  und  $Q$ ; ebenso sind  $PA$  und  $RA$ ,  $PB$  und  $RB$  u. s. f. entsprechende Geraden der Systeme  $P$  und  $R$ . Die Systeme  $P$  und  $Q$  oder  $P$  und  $R$  entsprechen sich somit nicht nur Punkt für Punkt, sondern es entsprechen auch den Geraden des einen Systems (vor- und rückwärts) eindeutig die Geraden des andern Systems. Hierbei schneiden sich entsprechende Geraden auf  $g$ , deren Punkte sämtlich selbstentsprechende sind. — Zwei parallele Linien  $m$ ,  $n$  des Systems  $P$  sind die Bilder von zwei parallelen Linien  $m'$ ,  $n'$  des Systems  $P'$ ; die entsprechenden Linien  $\underline{m}$ ,  $\underline{n}$  des Systems  $Q$  (oder  $R$ ) müssen ebenfalls parallel sein, wegen der Gleichheit der mit  $g$  bezüglich mit  $g'$  eingeschlossenen Winkel, wobei der Sinn überall derselbe oder der entgegengesetzte ist. — In Fig. 15 denke man sich einen Punkt  $P^*$  hinzugefügt und ziehe durch ihn die mit  $a$ ,  $b$ , ...,  $a_1$ ,  $b_1$ , ... parallelen Linien  $a^*$ ,  $b^*$ , ...,  $a_1^*$ ,  $b_1^*$ , ..., welche  $g$  bezüglich in  $A^*$ ,  $B^*$ , ...,  $A_1^*$ ,  $B_1^*$ , ... schneiden mögen. Es sind nun auch  $a^*$ ,  $a_1^*$ ;  $b^*$ ,  $b_1^*$ , ... die Bilder von Rechtwinkelpaaren. Wenn man somit über den Strecken  $A^*A_1^*$ ,  $B^*B_1^*$ , ... als Durchmesser Kreise schlägt, so schneiden sich dieselben sämtlich in den  $P^*$  zugeordneten Punkten  $Q^*$  und  $R^*$ . Hierbei sollen wieder  $P^*$  und  $Q^*$  auf derselben Seite, dagegen  $P^*$  und  $R^*$  auf entgegengesetzter Seite von  $g$  liegen. Die Verbindungslinien von  $Q^*$  (oder von  $R^*$ ) mit  $A^*$ ,  $B^*$ , ... seien  $\underline{a^*}$ ,  $\underline{b^*}$ , ... Alsdann sind die aus  $P$ ,  $g$ ,  $Q$ ,  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_1$ , ... und aus  $P^*$ ,  $g$ ,  $Q^*$ ,  $A^*$ ,  $A_1^*$ ,  $B^*$ ,  $B_1^*$ , ... bestehenden Figuren einander ähnlich und in paralleler Lage, auch wenn man  $Q$  und  $Q^*$  durch  $R$  und  $R^*$  ersetzt. Daraus folgt aber, dass die Strahlen  $PQ$  und  $P^*Q^*$ , anderseits  $PR$  und  $P^*R^*$  je parallel sind. Aus dem eben gegebenen Beweise folgt noch, dass wenn  $P^*$  auf  $PQ$  (oder  $PR$ ) gewählt wird, auch  $Q^*$  auf demselben Strahle  $PQ$  ( $R^*$  auf  $PR$ ) liegen muss. Es sind somit für die Systeme  $P$  und  $Q$  die mit  $PQ$  parallelen Strahlen selbstentsprechende; ebenso die mit  $PR$  parallelen für die Systeme  $P$  und  $R$ .

Die Beziehung zwischen den Systemen  $P$  und  $Q$  hat somit folgende Eigentümlichkeiten. Die Punkte und die Geraden beider Systeme sind einander eindeutig zugeordnet. Ent-

sprechende Punktepaare auf derselben Seite von  $g$  liegend, haben Verbindungslinien, welche sämtlich parallel sind. Diese Verbindungslinien sind als selbstentsprechende Linien zu betrachten. Entsprechende Linien, wie  $a$  und  $\underline{a}$ , schneiden sich auf der festen Geraden  $g$ , deren Punkte sich sämtlich selbst entsprechen. Auch entsprechen parallelen Linien (unendlich fernen Punkten) des einen Systems wieder parallele Linien (unendlich ferne Punkte) des andern Systems. — Für die Systeme  $P$  und  $R$  gelten dieselben Gesetze, jedoch mit dem Unterschiede, dass je zwei entsprechende Punkte zu verschiedenen Seiten von  $g$  liegen. Solche ebene Systeme bezeichnet man als **centrisch-affine**. Die Linie  $g$  ist die Affinitätsaxe, die parallelen Verbindungslinien entsprechender Punktepaare heißen Affinitätsstrahlen. — Kennt man die Axe  $g$  und zu einem Punkte  $P$  den zugeordneten Punkt  $Q$ , so kann man zu jedem Punkt  $P_1$  den zugeordneten Punkt  $Q_1$  finden. Durch den Schnittpunkt von  $PP_1$  nach  $g$  ziehe man eine Gerade durch  $Q$  gehend; diese wird durch  $Q_1$  gehen müssen. Ferner ist die Linie  $P_1Q_1$  mit  $PQ$  parallel, somit  $Q_1$  eindeutig bestimmt. Oder man konstruiere ein mit dem Dreiecke  $PGQ$ , wo  $G$  auf  $g$  willkürlich gewählt ist, ähnliches Dreieck in paralleler Lage  $P_1G_1Q_1$ , wobei  $G_1$  ebenfalls auf  $g$  liegen soll, so ergibt sich der  $P_1$  entsprechende Punkt  $Q_1$ . Die Beziehung zwischen beiden Systemen  $P$  und  $Q$  ist auch bestimmt, wenn man die Axe  $g$ , die Richtung der Affinitätsstrahlen und ein Paar entsprechende Linien kennt. Letztere werden von den Affinitätsstrahlen in entsprechenden Punkten geschnitten. Diese entsprechenden Punkte, mit irgend einem Punkte von  $g$  verbunden, ergeben neue entsprechende Linienpaare. Die zu diesen letzteren, durch beliebige Punkte auf  $g$  gezogenen Parallelen entsprechen sich ebenfalls. Hiernach ergibt sich die Herstellung der centrisch-affinen Systeme in derjenigen einfachen Weise, in welcher bei der Orthogonalprojektion zu dem Bilde einer ebenen Figur deren Umlegung, oder umgekehrt, konstruiert wird, nachdem bereits für ein Element Bild und Umlegung bekannt sind. Die Konstruktionen sind beiderseits dieselben; nur hat man es bei dem genannten

Beispiele mit dem speziellen Falle zu thun, dass die Affinitätsstrahlen auf der Affinitätsaxe senkrecht stehen.

Nach diesen Auseinandersetzungen wird es genügen, die gefundenen Resultate in dem Satze zusammenzufassen: Kennt man die Bilder zweier Rechtwinkelpaare des Originalsystems, so kann man in der Bildebene längs einer beliebig gewählten Geraden  $g$  auf zwei Arten ein an das Bildsystem anschliessendes, ihm zugeordnetes System konstruieren, welches dem Originalsystem ähnlich und mit dem Bildsystem centrisc-affin ist, mit  $g$  als Affinitätsaxe. Beide Systeme sind orthogonal-symmetrisch in Bezug auf  $g$  als Axe. Die Möglichkeit dieser Ausführung ergibt sich übrigens von selbst, wenn man bedenkt, dass die Reihen auf  $g^r$  und  $g$  ähnlich sind; wenn man nur die Winkel, unter denen die Originallinien  $a^r, b^r, \dots$  bei  $A^r, B^r, \dots$  die Linie  $g^r$  schneiden in einheitlicher Weise in den Bildpunkten  $A, B, \dots$  an  $g$  anträgt.\* Man könnte damit diese Untersuchung auf eine allgemeinere Grundlage stellen. Aber es bietet die Durchführung, die von den Rechtwinkelpaaren ausgeht, den Vorteil grösserer Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit.

Bezüglich des Zusammenhanges zwischen dem Bildsysteme und seinen zugeordneten Systemen möge noch folgendes bemerkt werden. Die Abschnitte  $AA_1, BB_1, \dots$  (Fig. 15) trennen sich (vergl. Nr. 2) Deshalb werden sich die über  $AA_1, BB_1, \dots$  konstruierten Kreise stets in zwei reellen Punkten  $Q, R$  schneiden. Für jede Parallelprojektion und für jede Lage der Anschlusslinie  $g$  sind somit die den Punkten des Bildsystems zugeordneten Punkte stets reell vorhanden. — In dem Affinitätsstrahle  $PQ$  (oder  $PR$ ) sind zwei entsprechende Strahlen  $t, \underline{t}$  vereinigt. Da der Winkel  $\underline{t}g$  mit

\* Am einfachsten setzt man voraus, man kenne zwei Winkel, welche von zwei (nicht parallelen) Geraden  $a^r, b^r$  mit  $A^rB^r$  gebildet werden und auch den (hiervon abhängigen) von  $a^r$  mit  $b^r$  eingeschlossenen Winkel. Alsdann kann man auf zwei Arten die ersten Winkel bei  $A$  und  $B$  so an  $AB$  antragen, dass die Endschenkel  $\underline{a}, \underline{b}$  den zuletzt genannten Winkel mit einander einschliessen.

dem Originale  $t'g'$  des Winkels  $tg$  übereinstimmt, so folgt: Die bei den zugeordneten Systemen auftretenden Affinitätsstrahlen sind solche Linien des Bildes, welche mit der Anschlusslinie gleiche Winkel bilden wie ihre entsprechenden Linien des Originalsystems mit dem Originale der Anschlusslinie. Fig. 15 zeigt, dass diese Linien die einzigen sind, für welche diese Gleichheit besteht; für jede Gerade  $g$ , bezüglich  $g'$ , giebt es zwei Scharen parallele Linien von jener Eigenschaft und es sind stets beide Scharen reell. Eine nähere Auseinandersetzung ist in Nr. 58 enthalten.

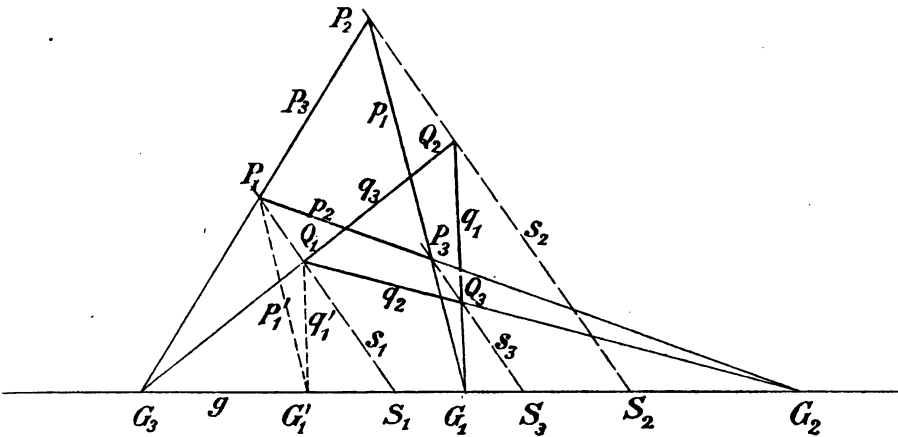
11. Bei der Besprechung der Systeme  $Q$  und  $R$ , welche dem Bildsystem  $P$  zugeordnet sind, ist bereits das Wesentliche über die Herstellung von centriscch-affinen Systemen angegeben worden.

Zwei entsprechende gerade Punktreihen solcher Systeme,  $P, P_1, P_2, \dots$  vom Träger  $p$  und  $Q, Q_1, Q_2, \dots$  vom Träger  $q$ , sind stets ähnliche Reihen. Sie haben den Schnittpunkt mit der Axe  $g$  entsprechend gemein und im übrigen liegen die entsprechenden Punktpaare  $P, Q; P_1, Q_1; \dots$  auf den unter sich parallelen Affinitätsstrahlen. In dieser Weise entstehen alle ähnlichen Reihen. (Würde man die Träger derselben in parallele Lage bringen, so würden nunmehr die Verbindungslinien entsprechender Punktpaare ein Strahlenbüschel bilden.)

In Fig. 17 (S. 31) sind einige Bestandteile von zwei centriscch-affinen Systemen zur Anschauung gebracht. Es seien die Axe  $g$ , das Dreieck  $P_1 P_2 P_3$  des einen Systems und der  $P_1$  entsprechende Punkt  $Q_1$  des andern Systems gegeben. Um  $Q_2$  zu finden, schneidet man  $g$  mit  $P_1 P_2$  in  $G_3$ , verbindet  $G_3$  mit  $Q_1$  und schneidet  $G_3 Q_1$  mit der durch  $P_2$  zu  $P_1 Q_1$  oder  $s_1$  gezogenen Parallele  $s_2$ . In ähnlicher Weise findet man, durch Benutzung des Schnittes  $G_2$  auf  $g$  und des Affinitätsstrahles  $s_3$ , den Punkt  $Q_3$ . Den Seiten  $p_1, p_2, p_3$  des Dreiecks der Punkte  $P$  entsprechen bezüglich die Seiten  $q_1, q_2, q_3$  des Dreiecks der Punkte  $Q$ . Würde man durch  $P_1$  die Parallele  $p_1'$  zu  $p_1$  und durch  $Q$  die Parallele  $q_1'$  zu  $q_1$  ziehen, so müssten sie sich, als entsprechende Linien, auf  $g$  schneiden.

Schneidet man  $g$  mit  $s_1, s_2, s_3$  in  $S_1, S_2, S_3$ , so stimmen offenbar die Verhältnisse  $P_1S_1 : Q_1S_1, P_2S_2 : Q_2S_2, P_3S_3 : Q_3S_3$  überein. Diese Verhältnisse aber bleiben dieselben, wenn man die Abstände von den Punkten  $P$  und  $Q$  bis nach  $g$ , je auf zwei beliebigen Parallelen, namentlich auf Senkrechten zu  $g$ , misst. Es folgt, dass alle entsprechenden Punktepaare

Fig. 17.



der beiden centrisch-affinen Systeme von der Axe dasselbe Abstandsverhältnis haben.

Der bequemeren Ausdrucksweise halber setze man fest, es seien  $Q_1S_1, Q_2S_2, \dots$  je das  $k$ fache der Strecken  $P_1S_1, P_2S_2, \dots$  (für die Systeme  $P$  und  $Q$  ist  $k$  positiv; für die Systeme  $P$  und  $R$  hat  $k$  einen negativen Wert). Da Dreiecke von gleichen Grundlinien sich verhalten wie die diesen entsprechenden Höhen, so folgt, dass die Inhalte der Dreiecke  $G_3Q_1G_2, G_2Q_3G_1, G_1Q_2G_3$  (Fig. 17) ebenfalls das  $k$ fache der Inhalte der Dreiecke  $G_3P_1G_2, G_2P_3G_1, G_1P_2G_3$ , betragen. Da nun weiter

$$\begin{aligned} G_1Q_2G_3 + G_2Q_3G_1 - G_3Q_1G_2 &= Q_1Q_2Q_3, \\ G_1P_2G_3 + G_2P_3G_1 - G_3P_1G_2 &= P_1P_2P_3 \end{aligned}$$

ist (wobei die Inhalte nur dem absoluten Werte nach zu verstehen sind), so folgt, dass der Inhalt des beliebigen Dreiecks  $Q_1Q_2Q_3$  das  $k$ fache des Inhaltes seines entsprechenden Dreiecks

$P_1 P_2 P_3$  beträgt. Da sich ferner zwei beliebige entsprechende Figuren der beiden Systeme in entsprechende Dreiecke (in endlicher oder unendlicher Anzahl) zerlegen lassen, so folgt allgemein, dass die Flächeninhalte aller geschlossenen Figuren der centrisch-affinen Systeme in einem konstanten Verhältnisse zu einander stehen. Da aber hier das System  $Q$  mit dem Originalsystem  $P^r$  ähnlich ist, so folgt weiter, dass die Inhalte sämtlicher Figuren des Originalsystems und die Inhalte ihrer Bilder in konstantem Verhältnisse zu einander stehen.

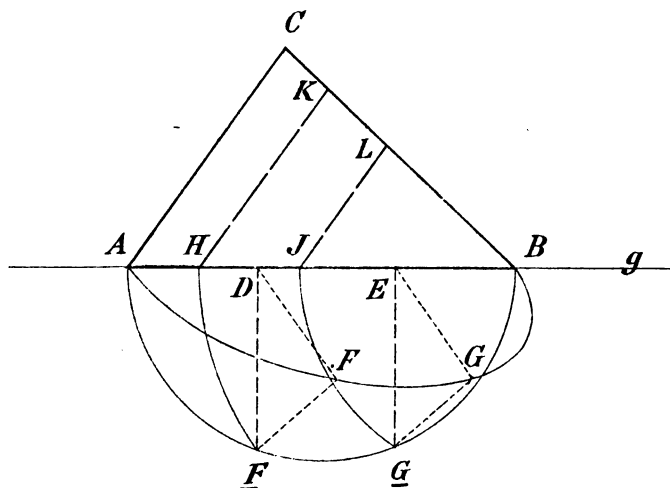
(Bezüglich der gegenseitigen Lage der Systeme  $P$  und  $Q$ , Fig. 17, besteht eine gewisse Willkürlichkeit. Wird das System  $P$  festgehalten, das System  $Q$  aber in der Richtung der Strahlen  $s$  willkürlich parallel verschoben, so sind auch nach der Verschiebung die Systeme centrisch-affin, wobei eine neue Axe auftritt, in Bezug auf welche die entsprechenden Punktepaare wieder das nämliche Abstandsverhältnis haben. Zwei centrisch-affine Systeme bleiben centrisch-affin, wenn man sie in der Richtung der Affinitätsstrahlen beliebig parallel verschiebt. Das charakteristische Verhältniss bleibt hierbei erhalten. — Hätte man umgekehrt in erster Linie  $g$  parallel verschoben, so wären die neuen zugeordneten Systeme  $Q, R$  mit den ursprünglichen kongruent. Denn die Originalstrecken und die Bildstrecken paralleler Linien  $g^r, g$  stehen in demselben Verhältnisse zu einander.)

Eine wichtige Folgerung dieses Satzes bezieht sich auf die Teilung geradliniger Figuren. Hat man nämlich ein geschlossenes Polygon der Originalebene durch geradlinige Transversalen so zu teilen, dass die Inhalte der Teile vorgeschriebene Zahlenverhältnisse haben, so dürfen diese Teilungskonstruktionen am Bilde direkt ausgeführt werden. — Als Beispiel werde folgendes gewählt.  $ABC$  sei das Bild eines Dreiecks  $A^r B^r C^r$ . Letzteres soll durch zwei mit  $A^r C^r$  parallele Transversalen  $H^r K^r, J^r L^r$  in drei Flächen zerlegt werden, deren Inhalte sich wie die drei gegebenen Zahlen oder Strecken  $m, n, p$  verhalten. Man mache (Fig. 18 [S. 33])  $AD : DE : EB = m : n : p$ , errichte in  $D$  und  $E$  auf  $AB$  die



Senkrechten, welche den über  $AB$  als Durchmesser beschriebenen Halbkreis in  $\underline{F}$ ,  $\underline{G}$  schneiden. Darauf mache man  $BH = \underline{BF}$  und  $BJ = \underline{BG}$ , ziehe  $HK$ ,  $JL$  parallel mit  $AC$ . Diese Linien sind die Bilder der Teilungslinien der Originalfigur. — Hätte man die eben genannte Konstruktion an der

Fig. 18.

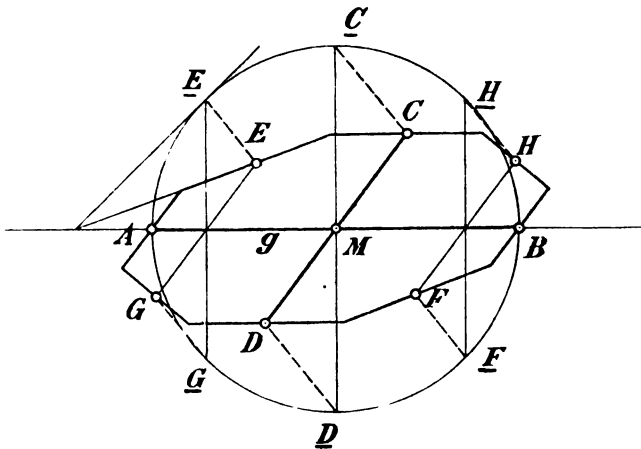


Originalfigur ausgeführt, so würde der über  $A^r B^r$  beschriebene Halbkreis mit den Punkten  $F^r G^r$  sich als halbe Ellipse über dem Durchmesser  $AB$  mit den Punkten  $\underline{F} \underline{G}$  projizieren. Jene Halbellipse und der Halbkreis über  $AB$  sind zugeordnete, centrisch-affine Figuren mit Bezug auf  $AB = g$  als Anschlusslinie. Die auf die Ellipse bezügliche Konstruktion wird durch Übergang zu der zugeordneten Figur  $ABD\underline{F}EG$ , welche der Originalfigur  $A^r B^r D^r F^r E^r G^r$  ähnlich ist, gelöst.

Eine bekannte Anwendung des Inhaltes der vorangehenden Nummer bezieht sich auf die Konstruktion des Kreisbildes. Es seien die konjugierten Durchmesser  $AB$ ;  $CD$  des Bildes gegeben (Fig. 19 [S. 34]). Man wähle einen der Durchmesser,  $AB$ , als Anschlusslinie  $g$ . Ferner beschreibe man über  $AB$  als Durchmesser einen Kreis (nämlich eine mit der Originalfigur ähnliche Figur). Sind  $\underline{C} \underline{D}$  (in beliebiger Reihenfolge) die Endpunkte des auf  $AB$  senkrechten Kreisdurch-

messers, so sind sie die zugeordneten Punkte der Endpunkte  $CD$  des zweiten Durchmessers. Die Affinitätsstrahlen sind mit  $\underline{CC}$  und  $\underline{DD}$  parallel. Die Affinität liefert zu jedem Punkt des Kreises den entsprechenden des Kreisbildes; die bezüglichen Tangenten in diesen Punkten schneiden sich jedesmal auf  $g$ . Konstruiert man zu den Endpunkten  $\underline{EF}$ ;  $\underline{GH}$  konjugierter Kreisdurchmesser die affinen Punkte  $EF$ ;  $GH$ ,

Fig. 19.



so erhält man unmittelbar konjugierte Durchmesser des Kreisbildes; es sind dabei die Tangenten in  $E$  und  $F$  parallel mit  $GH$ , und umgekehrt. Die Schnittpunkte einer Geraden  $m$  mit dem Kreisbilde sind die entsprechenden Punkte der Schnittpunkte der entsprechenden Linie  $\underline{m}$  mit dem Kreise. Um aus einem Punkte  $P$  an das Kreisbild die Tangenten zu legen, ziehe man aus  $\underline{P}$  die Tangenten an den Kreis, schneide sie mit  $g$  und verbinde diese Punkte wieder mit  $P$ . Der zugeordnete Kreis und das Kreisbild haben zwei mit den Affinitätsstrahlen parallele gemeinsame Tangenten. Im ganzen sind vier gemeinsame Tangenten vorhanden, von denen in Fig. 19 zwei mit  $\underline{CC}$  und zwei mit  $\underline{CD}$  parallel sind. Sie bilden einen Rhombus, dessen Diagonalen die Axen des Kreisbildes sind.\*

\* Mannheim, Cours de Géométrie descriptive, 1880, p. 117.



die Bilder zweier Rechtwinkelpaare eines ebenen Systems. In  $a$  liegt der Bildpunkt  $A$  und man konstruiert über  $AU$  ein Dreieck  $AOU$ , dessen Original bei  $O$  rechtwinklig ist und dessen Spitze  $O$  in  $b$  fällt. — Zur Auflösung wählt man am einfachsten  $b-g$  als Anschlusslinie. Der Linie  $a$  ist die in  $N$  auf  $g$  errichtete Senkrechte  $\underline{a}$  zugeordnet. Der  $U$  zugeordnete Punkt  $\underline{U}$  liegt auf  $\underline{a}$  und auf dem über  $FH$  als Durchmesser beschriebenen Kreise. Nun sind durch  $g$  als Axe und durch  $UU$  als entsprechende Punkte zwei centrisch-affine Systeme bestimmt. Legt man durch  $A$  den mit  $UU$  parallelen Affinitätsstrahl, so schneidet er  $\underline{a}$  in dem  $A$  zugeordneten Punkte  $\underline{A}$ . Der über  $UA$  als Durchmesser beschriebene Kreis wird endlich  $b$  in dem gesuchten Punkte  $O$  schneiden. — Es ist hier der Kreis vom Durchmesser  $A^r U^r$  mit einer Geraden  $b^r$  geschnitten worden, somit handelt es sich um einen speziellen Fall einer bereits erwähnten Aufgabe. Diese Konstruktion lässt sich in dem in Nr. 63 behandelten Beispiele direkt anwenden, die Linie  $f$  stimmt alsdann mit der Linie  $BC$  (Fig. 102) überein.

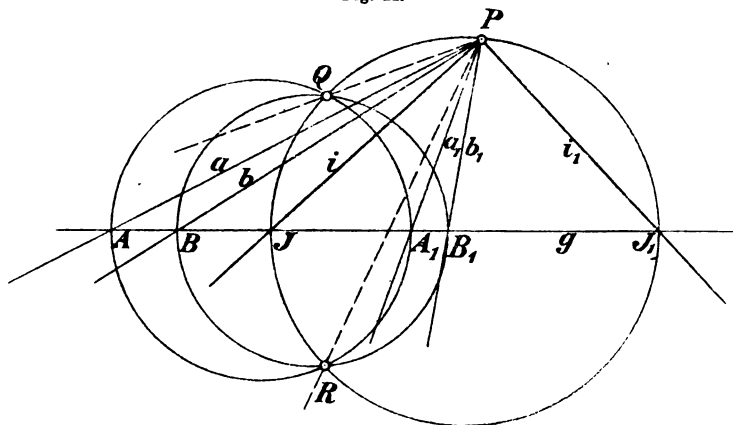
**12.** Eine Anwendung der in Nr. 9 gefundenen Beziehung zwischen den Bildern der Rechtwinkelpaare besteht darin, dass man, wenn die Bilder  $aa_1; bb_1$  zweier Rechtwinkelpaare bekannt sind, die gegenüberliegenden Linien des Bildsystems konstruiert, welche aufeinander senkrecht stehen.

Man vereinige (Fig. 21 [S. 37]) die beiden Paare  $a a_1; b b_1$  an einem beliebigen Punkte  $P$  und wähle, nicht durch  $P$  gehend, die Anschlusslinie  $g$ , welche von  $aa_1; bb_1$  in  $AA_1; BB_1$  geschnitten wird. Die Kreise von den Durchmessern  $AA_1$  und  $BB_1$  schneiden sich in den  $P$  zugeordneten Punkten  $QR$ , die zu  $g$  orthogonal symmetrisch liegen. Legt man durch  $Q$  und  $R$  gehend beliebige Kreise, deren Mittelpunkte in  $g$  liegen, so schneiden sie  $g$  in Punktpaaren, deren Verbindungslinien mit  $Q$  und  $R$  rechtwinklig sind. Mit  $P$  verbunden erhält man Bilder von Rechtwinkelpaaren. Einer dieser Kreise geht gleichzeitig durch  $QR$  und  $P$ . Er schneidet  $g$  in  $J, J_1$  und es

ist das Paar  $PJ PJ_1$  oder  $ii_1$  das Bild eines Rechtwinkelpaares und zugleich selbst ein Rechtwinkelpaar.

Vermittelt jener Hilfskreise durch  $QR$  erhält man alle Bilder von Rechtwinkelpaaren vom Scheitel  $P$ . Unter ihnen ist das Paar  $ii_1$  das einzige, welches selbst ein Rechtwinkelpaar ist. Ersetzt man  $P$  durch einen anderen Punkt des Bildes, so wird ein Paar  $ii_1$  entstehen, welches aus dem eben gefundenen durch Parallelverschiebung hervorgeht (Nr. 2).

Fig. 21.

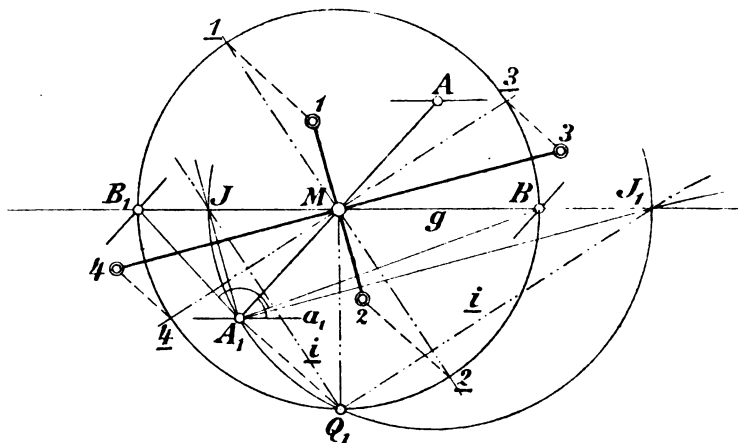


Das ebene System  $E'$  enthält somit zwei Scharen paralleler Linien, die sich gegenseitig rechtwinklig schneiden und deren Bilder zwei ebensolche rechtwinklige Systeme paralleler Linien bilden. — Handelt es sich um eine Orthogonalprojektion, so liegen in der Originalebene die einen dieser Linien mit der Spur  $E'P$  parallel; sie sind die Spurparallelen oder die Hauptlinien, die zweite Schar besteht aus den dazu Senkrechten, den Falllinien.

In Fig. 21 liegen die Punkte  $Q, R$  auf dem durch  $Q, R, P$  gehenden Kreise zu dessen Durchmesser  $JJ_1$  orthogonal-symmetrisch. Die damit zusammenhängende Gleichheit der Bogen  $JQ, JR$ , ferner  $J_1Q, J_1R$  zeigt, dass die Strahlen  $i$  und  $i_1$  die von den Geraden  $PQ, PR$  gebildeten Winkel halbieren. Letztere Geraden sind bekannt als Affinitätsstrahlen: Konstruiert

man bezüglich irgend einer Anschlusslinie  $g$  die dem Bildsysteme  $P$  zugeordneten Systeme  $Q, R$ , welche dem Originalsysteme ähnlich und mit dem Bildsystem centrisch-affin sind, so werden die Winkel der von einem Punkte des Bildes ausgehenden Affinitätsstrahlen von den durch diesen Punkt gelegten rechtwinkligen gegenüberliegenden Linien  $i, i_1$  halbiert.\*

Fig. 22.



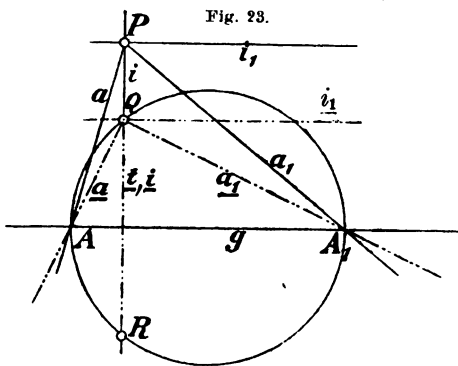
Die konjugierten Durchmesser des Kreisbildes sind die Bilder von Rechtwinkelpaaren. Das ausgezeichnete Paar  $i, i_1$  besteht aus den Axen des Bildes. Sind  $AA_1, BB_1$  zwei konjugierte Durchmesser des Bildes nach Lage und Grösse, so sollen die Axen ebenfalls nach Lage und Grösse konstruiert werden (Fig. 22). Die gegebenen konjugierten Durchmesser sind die Ecken eines Parallelogramms, dessen Mittelpunkt  $M$  in den Mittelpunkt des Kreisbildes fällt. — Zieht man in  $A_1$  die mit  $BB_1$  Parallele, so ist sie die Tangente  $a_1$  des Bildes im Punkte  $A_1$ . Dabei sind  $a_1$  und  $A_1M$  das Bild eines Rechtwinkelpaares der Originalebene. Ein zweites derartiges Bild besteht aus  $A_1B_1, A_1B$ . Hierauf wähle  $g$  als Durchmesser

\* In Fig. 19 sind somit die Axen des Kreisbildes mit den Winkelhalbierenden von  $\underline{CC}, \underline{CD}$  parallel.

$BB_1$ , schneide damit jene Paare und errichte über den Schnittpunkten Halbkreise, welche sich in  $Q_1$  schneiden. Der durch  $A_1$  und  $Q_1$  gelegte Kreis, dessen Centrum in  $g$  liegt, schneidet  $g$  in den Punkten  $J, J_1$ . Seine Verbindungslinien mit  $Q_1$  sind  $\underline{i}$  und  $\underline{i}_1$ . Verbindet man  $J, J_1$  mit  $A_1$ , so entstehen die Axenrichtungen, welche man nach  $M$  verlegt, so sind die Axen der Lage nach gefunden. — Um die Scheitel zu finden, benutzt man die zwischen dem Kreisbilde und dem über  $BB_1$  beschriebenen Kreise stattfindende centrische Affinität. Hierbei ist  $g$  die Axe und es sind  $A_1$  und  $Q_1$  entsprechende Punkte. Hierdurch ist die Affinität bestimmt. Die den Axen zugeordneten Strahlen sind die Parallelen aus  $M$  zu  $\underline{i}$  und zu  $\underline{i}_1$ , welche den Kreis in den Punkten  $\underline{1}, \underline{2}; \underline{3}, \underline{4}$  schneiden. Sie sind die zugeordneten Punkte der Scheitel  $1, 2; 3, 4$  des Kreisbildes.

13. Es ist einleuchtend, dass bei der Konstruktion der zugeordneten Systeme des Bildsystems (Nr. 10) vor allem die Lage der Anschlusslinie  $g$  von Einfluss sein wird. Durch besondere Wahl von  $g$  wird man erreichen können, dass die Affinität zwischen den zugeordneten Systemen  $P$  und  $Q$  oder  $P$  und  $R$  eine orthogonale wird, oder dass die Affinitätsstrahlen mit der Axe  $g$  parallel laufen.

Seien (Fig. 23)  $P$  und  $Q$  auf einer Senkrechten zu  $g$  gelegen. Legt man durch  $Q$  das beliebige Rechtwinkelpaar  $\underline{a}, \underline{a}_1$ , welches  $g$  in  $A, A_1$  schneidet, so sind die Verbindungslinien  $PA, PA_1$  zusammen das Bild eines Rechtwinkelpaares. Rückt  $\underline{a}$  nach  $\underline{t}$ , so wird  $\underline{a}_1$  parallel zu  $g$ . Man erkennt, dass die Senkrechte aus  $P$  auf  $g$  und die aus  $P$  zu  $g$  gezogene







$A'B'$ . Denn jene zugeordneten Systeme sind dem Originalsystem ähnlich mit  $AB$ ,  $A'B'$  als ein Paar entsprechender Strecken. Es entsteht nun naturgemäss die Frage nach solchen Linien  $g$ , bezüglich  $g'$ , für welche jenes konstante Verhältnis den Wert 1 hat. Es sind diesfalls die dem Bildsysteme zugeordneten Systeme  $Q$  und  $R$  dem Originalsystem kongruent.

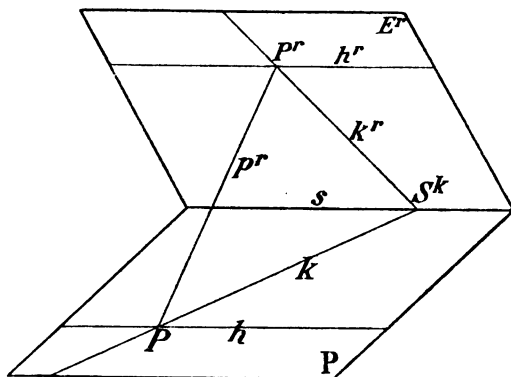
Die Linien  $g'$  und  $g$  sind hier die Träger gleicher Reihen. Alle Strecken in  $g$  sind mit den entsprechenden in  $g'$  von gleicher Länge. Es ist einleuchtend, dass wenn zwei ähnliche Reihen ein Paar entsprechender Strecken von gleicher Länge besitzen, alle entsprechenden Strecken gleich lang und die Reihen somit „gleich“ sein müssen (vergl. Nr. 1, S. 2).

Es gibt zwei Systeme von parallelen Geraden des Originalsystems  $E'$ , welche mit ihren Bildern die Träger gleicher entsprechender Reihen sind. Die einen sind, wie bekannt, die Spurparallelen oder Hauptlinien  $h'$ , welche der Spur  $s$  der Ebene  $E'$  in der Bildebene  $P$  parallel sind. Diese Geraden und ihre Bilder sind sämtlich parallel. Wählt man bei der Konstruktion der zugeordneten Systeme  $Q$  und  $R$  des Bildsystems  $P$  als Anschlusslinie  $g = h$  das Bild einer Hauptlinie  $h'$ , so sind die zugeordneten Systeme dem Originalsysteme kongruent. Es existiert hier ein einfacher geometrischer Übergang vom Originalsystem zu diesen zugeordneten Systemen des Bildsystems. Man drehe nämlich  $E'$  um  $h'$  in die parallele Lage mit  $P$  und projiziere hierauf das gedrehte System  $E'$  mit der ursprünglichen Projektionsrichtung  $p'$  (Nr. 1) auf die Bildebene  $P$ . Jene Drehung um  $h'$  ist auf zwei Arten auszuführen und es entstehen so die beiden besonderen Systeme  $Q$  und  $R$ . Diesen Vorgang, gleichgiltig ob  $h'$  mit  $s$  zusammenfällt oder nicht, bezeichnet man allgemein als die Umlegung der Originalebene.

Um das zweite System von Geraden in  $E'$ , welche mit ihren Bildern gleich sind, zu finden, hat man auf die Projektionsrichtung  $p'$  und die Lage der Ebene  $E'$  zu der Bildebene  $P$  Rücksicht zu nehmen. In Fig. 25 (S. 42) seien  $P'$  und  $P$  Original und Bild eines Punktes, also  $P'P$  die Pro-

jektionsrichtung. Denkt man sich zu der Strecke  $P^rP$  in der Mitte eine senkrechte Ebene gelegt, welche die Spur  $s$  in  $S^k$  schneidet, so sind  $S^kP^r$  auf  $k^r$  und  $S^kP$  auf  $k$  entsprechende Strecken von gleicher Länge.\* Alle Strecken auf  $k^r$  sind ihren Bildern auf  $k$  gleich; beliebige Parallelverschiebung von  $k^r$  in  $E^r$  ändert diese Eigenschaft nicht. Die Geraden  $k^r$  und

Fig. 25.



$k$  liegen offenbar in den zugehörigen projizierenden Ebenen  $k^rk$  zu den Projektionsstrahlen symmetrisch. Legt man bei der Konstruktion der zugeordneten Systeme des Bildsystems an Stelle der beliebigen An-

schlusslinie  $g$  eine Gerade der Schar  $k$  zu Grunde, so werden die zugeordneten Systeme mit dem Originalsysteme kongruent. Sind  $k^r$  in  $E^r$  und  $k$  in  $P$  bekannt, so kann man offenbar durch doppelte Drehung die Ebene  $E^r$  so in  $P$  legen, dass alle entsprechenden Punkte der Reihen  $k^r$  und  $k$  zur Deckung gelangen.

Mit Hilfe der Linien  $h$  und  $k$  kann man das Originalsystem auf vier wesentlich verschiedene Arten so an das Bildsystem anschliessen, dass zwei centrisch-affine Systeme entstehen. Beide Systeme sind deshalb affin. Hierbei bezeichnet man zwei ebene Systeme, welche durch Zusammenlegen centrisch-affin gemacht werden können, als affine

\* Die Linien  $k^r$  entstehen als Schnitte von  $E^r$  mit Ebenen, die zu  $P$  parallel sind. Legt man aber die symmetrischen Ebenen zu  $P$  in Bezug auf die Projektionsrichtung  $p^r$ , so werden sie  $E^r$  in den Geraden des Systems  $k^r$  schneiden.

Systeme (in nicht centrischer Lage). Eine nähere Auseinandersetzung folgt in Nr. 15.

Bei der Konstruktion der Linie  $k^r, k$  (Fig. 25) kann ausnahmsweise der Fall eintreten, dass die Hilfsebene mit der Spur  $s$  parallel ist. Es liegt diesfalls der Schnittpunkt  $S^k$  mit  $s$  unendlich fern. Dieser Fall ist als derjenige zu bezeichnen, in welchem die Spur  $s$  der Ebene  $E^r$  und die Projektionsrichtung  $p^r$  sich rechtwinklig kreuzen. Dann fallen die Linien  $k$  mit den Hauptlinien zusammen. Die zwischen dem Originalsystem und dem Bildsysteme bestehende Affinität muss alsdann derart spezialisiert sein, dass beide Systeme wesentlich nur noch auf zwei Arten in die centrische Lage gebracht werden können, wobei die Affinitätsstrahlen auf der Affinitätsaxe senkrecht stehen. Zu diesem Spezialfalle gehört namentlich die Orthogonalprojektion.

Bemerkenswert ist weiterhin der Spezialfall, dass die in der Mitte von  $P^r P$  (Fig. 25) errichtete Normalebene die Spur  $s$  ganz enthält. Dann sind  $S^k, k^r, k$  gänzlich unbestimmt. Dieser Fall tritt ein, wenn die Projektionsrichtung  $p^r$  auf einer der Ebenen, welche die von  $E^r$  mit  $P$  gebildeten Flächenwinkel halbieren, senkrecht steht. Es sind somit hier  $E^r$  und  $P$  zu  $p^r$  symmetrisch gelegen\* und das Originalsystem ist mit seinem Bilde kongruent; alle entsprechenden Linienpaare sind die Träger gleicher Reihen, weshalb die Linien  $k$  unbestimmt sind. Das dem Bildsysteme  $P$  zugeordnete System  $Q$  deckt sich mit  $P$  für jede beliebige Anschlusslinie, die Systeme  $P$  und  $R$  aber sind orthogonal-symmetrisch zu  $g$ .

— Das Originalsystem und sein Bild sind in einer solchen Abhängigkeit von einander, dass man sie auf vier Arten in derselben Ebene ( $P$ ) als centrisch-affine Systeme zusammenlegen kann. (Auch ist das Bildsystem mit unendlich vielen Systemen, die dem Originalsysteme ähnlich sind, centrisch-

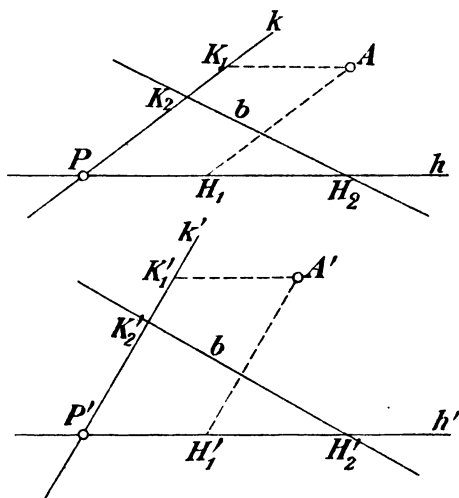
---

\* Zwei Ebenen sind zu einer Geraden orthogonal-symmetrisch gelegen, wenn sie mit der Geraden gleiche Winkel bilden und ihre Schnittlinie die Gerade rechtwinklig kreuzt oder schneidet und umgekehrt. Auch sind solche zwei Ebenen stets zu einer Normalebene jener Geraden orthogonal-symmetrisch und umgekehrt.

affin.) Wenn jedoch die Spur der Ebene und die Projektionsrichtung sich rechtwinklig kreuzen, so lassen sich die Systeme noch wesentlich auf zwei Arten zu centriscch-affinen Systemen zusammenlegen und es stehen dabei die Affinitätsstrahlen auf der Affinitätsaxe senkrecht. In dem speziellsten Falle sind die beiden sonst affinen Systeme kongruent und es entsteht dann bei dem Zusammenlegen entweder Deckung oder orthogonale Symmetrie.

Handelt es sich um die Orthogonalprojektion eines ebenen Systems  $E^r$  auf die Bildebene  $P$ , so erzeugt man mit Hilfe jeder Geraden  $g$  des Bildes zwei dem Originalsysteme ähnliche, dem Bildsysteme zugeordnete Systeme  $Q, R$ . Wird  $g$  zu dem Bilde  $h$  einer Hauptlinie, so sind die zugeordneten Systeme dem Systeme  $E^r$  kongruent (Fall der „Umlegung“ der Ebene). Wählt man für  $g$  das Bild  $f$  einer Falllinie, so werden die Systeme  $Q, R$  zu  $P$  orthogonal-affin. — Bringt

Fig. 26 u. 27.



man das Originalsystem zu dem Bildsysteme in centriscche Lage, so entsteht allemal die orthogonale centriscche Affinität, welche der Umlegung der Ebene entspricht.

15. Wenn die Projektionsrichtung  $p^r$  und die Spur  $s$  der Ebene  $E^r$  sich nicht etwa rechtwinklig kreuzen, so giebt es in  $E^r$  zwei verschiedene (und reelle) Systeme paralleler Li-

nien  $h^r, k^r$ , deren Reihen sich als gleiche Reihen projizieren. Für die Bildebene  $P$  als Zeichnungsfläche stellt Fig. 26 die durch den Punkt  $P$  gelegten Linien  $h, k$  dar. Der Bildpunkt  $A$  hat bezüglich dieser Linien als Koordinatenachsen die

schiefwinkligen (Parallel-) Koordinaten  $PH_1$  auf  $h$  und  $PK_1$  auf  $k$ . Weiter schneidet die Gerade  $b$  auf  $h$  und  $k$  die Abschnitte  $PH_2, PK_2$  aus. — Figur 27 stellt die entsprechende Figur  $P', h', k', A', \dots$  dar, welche, ebenfalls in  $P$  liegend, mit der Originalfigur  $P^r, h^r, k^r, A^r, \dots$  kongruent sein soll. Die entsprechenden Punkte der Geradenpaare  $h, h'$  und  $k, k'$  bilden gleiche Reihen mit  $P$  und  $P'$  als entsprechenden Punkten. Den aus  $A$  zu  $h$  und  $k$  gezogenen Parallelen entsprechen die aus  $A'$  mit  $h'$  und  $k'$  Parallelen. Ebenso sind deren Schnittpunkte  $H_1, K_1, H'_1, K'_1$  entsprechende Elemente beider Systeme und es folgt, dass die Koordinaten  $PH_1, PK_1$  von  $A$  in Bezug auf  $h, k$  als Axen mit den Koordinaten  $P'H'_1, P'K'_1$  des Punktes  $A'$ , bezogen auf  $h', k'$  als Axen, übereinstimmen. Für die entsprechenden Linien  $b, b'$  sind ebenso die Abschnitte  $PH_2, PK_2$  den Abschnitten  $P'H'_2, P'K'_2$  bezüglich gleich. Es folgt: Die entsprechenden Elemente des Originalsystems  $E^r$  und deren Bilder im Systeme  $P$ , bezogen auf die ausgezeichneten Linien  $h^r, k^r; h, k$  als Koordinatenachsen, haben in diesen Koordinatensystemen bezüglich gleiche Koordinaten.\* Hierbei bezieht sich die Gleichheit auf Grösse und Vorzeichen. — Für  $AH_1 = \pm AK_1$  folgt  $A'H'_1 = \pm A'K'_1$ , daher der Satz: Den Winkelhalbierenden  $i, i_1$  des Linienpaares  $h, k$  entsprechen die Winkelhalbierenden  $i^r, i_1^r$  des Paares  $h^r k^r$ . Hierbei sind  $i, i_1$  die (einzigen) gegenüberliegenden Linien des Bildsystems, welche durch  $P$  gehen, die aufeinander senkrecht stehen. Sie halbieren die von  $h$  mit  $k$  gebildeten Winkel und ihre Originale  $i^r, i_1^r$  halbieren ebenso die von  $h^r$  mit  $k^r$  gebildeten Winkel.

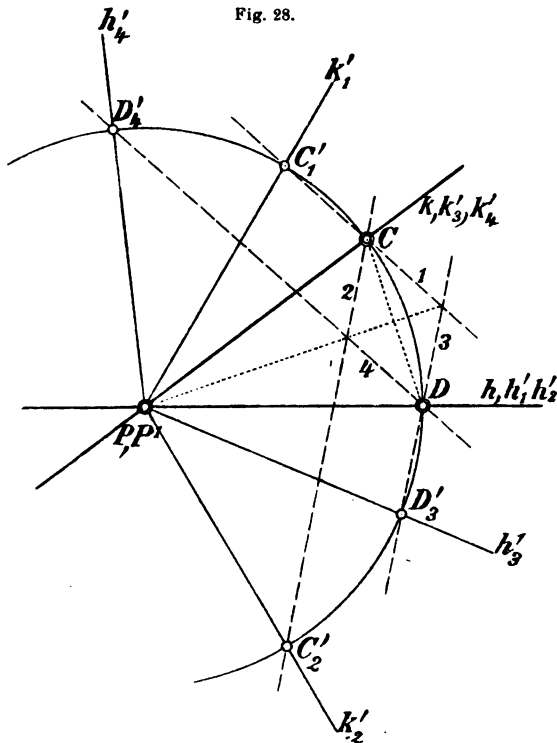
Man wird bemerken, dass in diesen letzten Betrachtungen die Linien  $h, k$  genau die nämliche Rolle spielen, somit als vertauschbar angesehen werden können.

Man lege nun Fig. 27 so an Fig. 26, dass die entsprechenden Punkte der Reihen  $h$  und  $h'$  zusammenfallen. Die so zusammengelegten Systeme  $A$  und  $A'$  sind centriscch-affin

\* Möbius, Werke, I.

(Nr. 14, S. 41). Einem Punkte  $C$  auf  $k$  (Fig. 28) entspricht  $C'_1$  auf  $k'_1$  oder, für die zweite mögliche Zusammenlegung,  $C'_2$  auf  $k'_2$ .\* Alle drei Punkte  $C, C'_1, C'_2$  sind von  $P = P'$  gleichweit entfernt und es sind die Sehnen  $CC'_1$  oder 1 und  $CC'_2$  oder 2 die Affinitätsstrahlen für den Punkt  $C$ . (Die Affinitäts-

Fig. 28.



strahlen der übrigen Punkte sind damit parallel und es ist überhaupt die centrische Affinität der Systeme durch  $g = h = h'_1 = h'_2$  als Axe und das Paar  $C, C'_1$ , bezüglich  $C, C'_2$ , völlig bestimmt, S. 28). — In ebendieser Figur drehe man nun das dem Originalsysteme kongruente System so, dass  $k'$  auf  $k$  fällt. Es gelangt dann  $h'$  nach  $h'_3$ , der Punkt  $D'$ , der früher mit

\* Hierbei sind  $C'_1, C'_2$  die dem Punkte  $C$  zugeordneten Punkte mit  $g = h = h'$  als Anschlusslinie.

$D$  vereinigt war, nach  $D'_3$ . (Hierbei hat man  $C, D$  in gleicher Entfernung von  $P$  angenommen.) Hierauf ist  $k = k'_3$  die Axe der Affinität und  $DD'_3$  ein Affinitätsstrahl. Diese mit 3 bezeichnete Linie ist offenbar mit 2 parallel; denn die Bogen  $DC'_1, DC'_2$ , ferner  $C'_1C$  und  $DD'_3$  sind je gleich, somit auch deren Differenzen  $DC$  und  $D'_3C'_3$ . — Es ist noch eine Zusammenlegung von  $k'$  mit  $k$  möglich, bei welcher  $D'$ , früher in  $D$  liegend, nach  $D'_4$  gelangt. Dabei gelangt  $h'$  nach  $h'_4$ . Für die so liegenden centrisch-affinen Systeme ist  $k = k'_4$  die Axe und  $DD'_4$  oder 4 die Richtung der Affinitätsstrahlen, indem  $D, D'_4$  zwei entsprechende Punkte sind. Hierbei hat 4 mit 1 dieselbe Richtung (aus analogen Gründen wie vorhin 3 mit 2). Beachtet man noch, dass das System  $h', k'$  dem Original des ebenen Systems vom Bild  $h, k$  kongruent vorausgesetzt ist, so folgt: Original und Bild eines ebenen Systems lassen sich auf vier Arten in derselben Ebene so zusammenlegen, dass sie centrisch affin sind. Dabei erscheint je eine der Linien  $h, k$  als Axe und es treten nur zwei Systeme von Affinitätsstrahlen auf. Bei den Zusammenlegungen 1 und 2, mit  $h$  als Axe, befindet sich das System  $h, k$  centrisch-affin mit zwei Systemen  $h'_1, k'_1; h'_2, k'_2$ , welche zu der Axe orthogonal-symmetrisch liegen. Ebenso sind die Systeme  $h'_3, k'_3; h'_4, k'_4$ , die mit  $h, k$  centrisch-affin sind, mit  $k$  als Axe, zu dieser Axe orthogonal-symmetrisch gelegen.

Hier ist das Bildsystem  $h, k$  festgehalten worden. In der so entstehenden Fig. 28 hat dies zur Folge, dass die Affinitätsstrahlen (1, 2, 3, 4) paarweise zu den Halbierungslinien der von  $h$  mit  $k$  gebildeten Winkel symmetrisch liegen. In Fig. 28 bilden nämlich die Affinitätsstrahlen 1, 2, 3, 4 einen Rhombus, dessen eine Diagonale durch  $P, P'$  geht und den Winkel  $hk$  halbiert (infolge der Gleichheit der bereits genannten Kreisbogen). Jene Diagonale ist eine Symmetrieaxe der Figur. — Die Strahlen 1, 2; 3, 4 liegen auch in Bezug auf die zweite Diagonale des Rhombus, welche der zweiten Winkelhalbierenden von  $h, k$  parallel ist, symmetrisch. — Endlich ist bekannt, dass die Winkelhalbierenden der Linien  $h, k$  rechtwinklige gegenüberliegende Strahlen

$i, i_1$  des Bildsystems sind. Die Affinitätsstrahlen haben somit, wie in dem allgemeinen Falle einer beliebigen Anschlusslinie, Nr. 12, S. 38, Strahlen  $i, i_1$  zu ihren Winkelhalbierenden.

Stehen die Linien  $h', k'$  aufeinander senkrecht, so geht der erwähnte Rhombus in ein Quadrat über und es werden auch die Affinitätsstrahlen sich rechtwinklig schneiden.

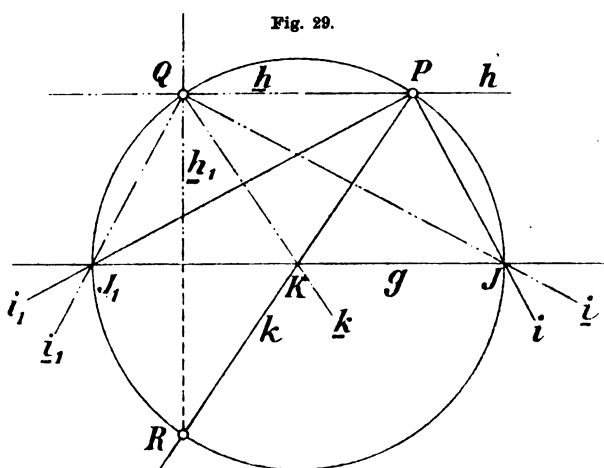
— Bei dieser Überführung des Originalsystems und des Bildsystems in die centrische Lage (ausgeführt in der Bildebene) ist bisher angenommen worden, dass die Originale und die Bilder der Linien  $h, k$  verschiedene Winkel miteinander einschliessen. Sind diese Winkel gleich, so fallen in Fig 28  $C'_1$  mit  $C$  und  $D'_1$  mit  $D$  zusammen. An Stelle der centrischen Affinität entsteht entweder Deckung der beiden Systeme oder orthogonale Symmetrie; die Affinitätsstrahlen werden in dem ersteren Falle unbestimmt. — Auch Nr. 14 mit Fig. 25 ergibt für diese Voraussetzung das Resultat, dass die Ebenen  $E^r$  und  $P$  zu  $p^r$  symmetrisch liegen, also das System  $E^r$  seinem Bilde kongruent ist.

Für das ebene System und sein Bild können die Linien  $h^r, k^r; h, k$  auch je zusammenfallen (Nr. 14). Dann lassen sich, wie bereits erwähnt, die beiden Systeme noch auf zwei Arten als centriſch-affine Figuren aneinanderlegen. Es existiert nämlich nur noch eine Axe,  $h = k$ ; dass jedesmal die Affinität eine orthogonale ist, geht aus Nr. 14 hervor.

— Ist die Anschlusslinie  $g$  eine Gerade der Scharen  $h, k$  des Bildsystems  $P$ , so sind die zugeordneten Systeme  $Q, R$  dem Originalsystem kongruent und umgekehrt (Nr. 14). Durch jeden Punkt  $P$  gehen die drei ausgezeichneten Strahlenpaare  $i, i_1; h, k; PQ, PR$  des Systems  $P$ , wobei die des letzten Paares den Punkt mit seinen zugeordneten verbinden. Das erste jener drei Paare besteht aus den Winkelhalbierenden des zweiten und dritten Paares. Hierbei ist es möglich, dass  $h$  und  $k$  mit  $PQ$  und  $PR$  zusammenfallen. Wählt man als Anschlusslinie  $g$  eine mit  $h$  parallele Gerade, so entsteht Fig. 29 (S. 49). Es folgt, dass hier Bildsystem und Originalsystem flächengleich sind; denn in Fig. 29 haben entsprechende Punkte von der Axe gleiche Entfernung.



Sollten (für jeden Punkt  $P$ ) die Affinitätsstrahlen zusammenfallen, so würde sich das Originalsystem auf eine Gerade reduzieren. — Wenn endlich  $h$  und  $k$  in  $i$  oder  $i_1$  zusammenfallen, so erhält man wieder denjenigen Fall der Abbildung eines ebenen Systems, bei welchem die Projektionsrichtung die Spur der Ebene rechtwinklig kreuzt. Wählt man hier zwei Linien  $i^r, i_1^r$  in  $E^r$  als Axen eines rechtwinkligen



Koordinatensystems, auf welche die Elemente von  $E'$  bezogen werden und bezieht man ebenso die entsprechenden Elemente des Bildes auf die Bilder  $i, i_1$  als Koordinatenachsen, so sind für die Punkte der beiden Systeme die einen dieser rechtwinkligen Koordinaten gleich, die anderen stehen in einem konstanten Verhältnisse zu einander. Das Originalsystem und sein Bild, gleichgiltig, ob sie in centrischer Lage sind oder nicht, sollen hier als normal-affine Systeme bezeichnet werden, vergl. Nr. 14, 57.\*

\* In dem allgemeinen Falle zweier „schief-affinen Systeme“  $E'$  und  $P$  (Bild) würden bezüglich dieser Koordinatensysteme die Koordinaten auf  $i'$  und  $i$ , und die auf  $i'_1$  und  $i_1$  gelegenen je in einem konstanten Verhältnisse zu einander stehen.

## Zweiter Teil.

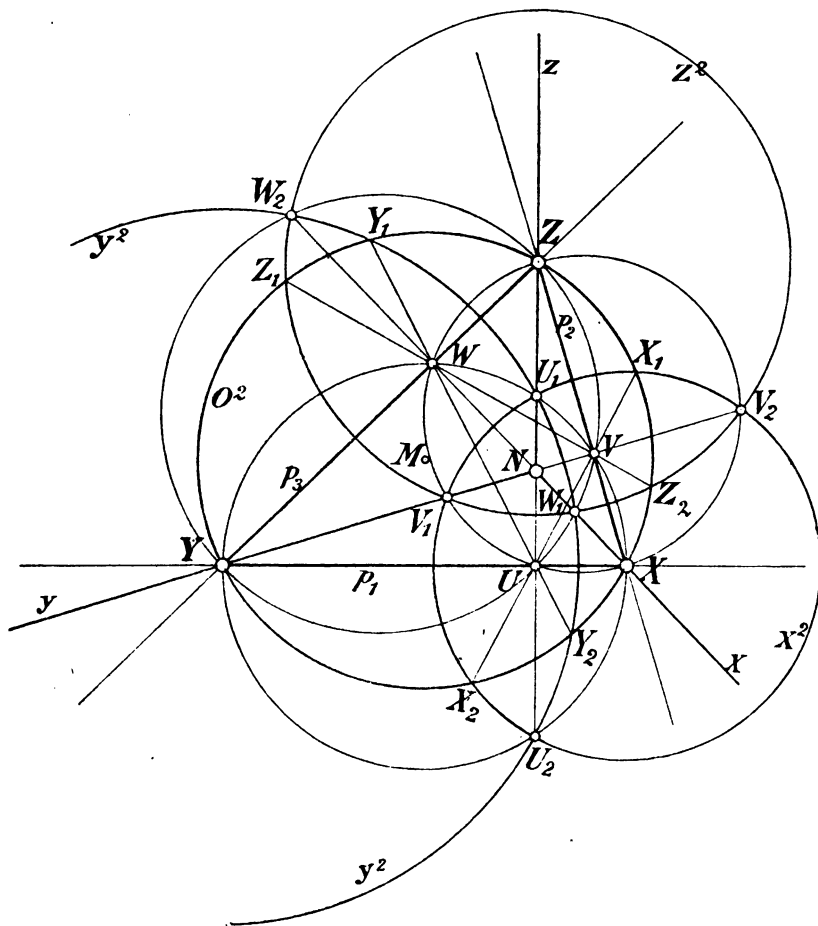
## Hilfssätze über das orthogonale Trieder.

16. Durch den Scheitelpunkt  $O^r$  des Raumes seien drei gegenseitig rechtwinklige Geraden  $x^r, y^r, z^r$ , die Kanten des orthogonalen Trieders, gelegt. Die Bildebene  $P$  werde von diesen räumlichen Kanten oder Axen bezüglich in den Punkten  $X, Y, Z$  geschnitten. Die Verbindungslinien  $XY = p_1, XZ = p_2, YZ = p_3$  sind die Spurlinien der drei Triederflächen  $x^r y^r, x^r z^r, y^r z^r$  in  $P$  (Fig. 30, S. 51). Die Orthogonalprojektion des Scheitels  $O^r$  auf die Bildebene  $P$  ist bekanntlich der Höhenschnitt  $N$  des Dreiecks  $XYZ$ . Die Projektionen der drei Axen  $x^r, y^r, z^r$  fallen in die Höhentransversalen des Dreiecks, sie sind  $x = NX, y = NY, z = NZ$ . Die Fusspunkte dieser drei Höhen in  $p_1, p_2, p_3$  seien bezüglich  $U, V, W$ .

Die Punkte  $X, Y, Z, U, V, W$  liegen dreimal zu je vier auf den Kreisen, welche über den Seiten des Spurendreiecks  $XYZ$  als Durchmesser beschrieben sind. Der Kreis über  $XY$  schneidet die zugeordnete Höhe  $ZU$  in zwei Punkten  $U_1, U_2$ , welche in Bezug auf  $p_1$  orthogonal-symmetrisch liegen. Die Dreiecke  $XU_1Y$  und  $XU_2Y$  sind als die Umlegungen des räumlichen Dreiecks  $XO^rY$  anzusehen, wobei die Umlegung um  $XY$  geschieht. Es sind also namentlich die Längen  $XU_1, XU_2$  gleich der räumlichen Länge  $XO^r$  oder  $x^r$  (diese durch  $X$  und  $O^r$  begrenzt gedacht). — In analoger Weise entstehen die Punkte  $V_1, V_2$  auf  $YV$  und  $W_1, W_2$  auf  $XW$ . In Fig. 30 erscheint die Umlegung der  $x^r$ -Axe als  $XU_1, XU_2, XV_1, XV_2$ , die  $y^r$ -Axe als  $YU_1, YU_2, YW_1, YW_2$ , endlich die  $z^r$ -Axe als  $ZV_1, ZV_2, ZW_1, ZW_2$ . Der um  $X$  mit dem Radius von der Länge  $x^r = XO^r$  beschriebene Kreis  $x^2$  geht durch die Punkte  $U_1, U_2, V_1, V_2$ ; er soll fortan der Axenkreis  $x^2$  genannt werden. — Es entstehen in analoger Weise die Axenkreise  $y^2$  durch die vier Punkte  $U_1, U_2, W_1, W_2$ , und  $z^2$  durch  $V_1, V_2$ ,

$W_1, W_2$  gehend. Die Punktpaare  $U_1, U_2$ ;  $V_1, V_2$ ;  $W_1, W_2$  sind die Schnittpunktepaare der Axenkreise.

Fig. 30.



Soll  $XYZ$  das Spurendreieck eines orthogonalen Trieders sein, so ist es notwendig ein spitzwinkliges Dreieck. Es sind nämlich, unter  $N$  den Höhenschnitt des Dreiecks verstanden,  $XNY$ ,  $YNZ$ ,  $ZNX$  als Orthogonalprojektionen dreier rechten Winkel, welche durch die Falllinien ihrer Ebenen geteilt werden,

notwendig stumpfe Winkel. Also schneiden sich die Seiten  $p_1, p_2, p_3$  unter spitzen Dreieckswinkeln.  $N$  liegt im Innern des Dreiecks. Es folgt noch, dass die Punkte  $U_1, U_2, V_1, \dots$  ihrer ursprünglichen Entstehung nach stets reell sind.

Man verzeichne ferner den dem Dreiecke  $XYZ$  umschriebenen Kreis  $o^2$ . Seine Tangenten in  $X, Y, Z$  sind bezüglich mit  $UV, UW, VW$  parallel. Ferner wird  $o^2$  von  $UV$  in zwei Punkten  $X_1, X_2$  des Axenkreises  $x^2$  geschnitten, von  $UW$  in zwei Punkten  $Y_1, Y_2$  auf  $y^2$ , endlich von  $VW$  in den Punkten  $Z_1, Z_2$  auf  $z^2$ . — Zum Beweise dieser Sätze wird die durch die vier Punkte  $X, Y, Z, O^r$  bestimmte Kugel eingeführt. Sie schneidet die Ebene  $P$  in  $o^2$ . Ein Kreis  $\xi^2$  dieser Kugel, durch  $O^r$  gehend, habe  $X$  zum sphärischen Zentrum. Seine Ebene ist mit der Tangentialebene der Kugel am Punkte  $X$  parallel, schneidet also die Ebene  $P$  in einer mit der Tangente des Kreises  $o^2$  im Punkte  $X$  parallelen Geraden. Diese Schnittlinie aber ist  $UV$ . Man denke sich nämlich die Kugel mit der Ebene  $XO^rZ$  geschnitten; es wird ein Kreis vom Durchmesser  $XZ$  entstehen, weil der Winkel  $XO^rZ$  ein rechter ist. Der orthogonal-symmetrische Punkt von  $O^r$  in Bezug auf  $XZ$  liegt auf dem Schnittkreise der Ebene  $XO^rZ$ , also überhaupt auch auf der Kugel. Er hat mit  $O^r$  denselben Abstand von  $X$ , liegt also auch auf  $\xi^2$ . Die aus  $O^r$  auf  $XZ$  gefällte Senkrechte ist eine Sehne des Kreises  $\xi^2$  und als solche in der Ebene des Kreises gelegen. Sie schneidet die Ebene  $P$  im Punkte  $V$ . Dieser Punkt  $V$  liegt also in der Ebene des Kreises  $\xi^2$  und somit auch in der Schnittlinie dieser Ebene mit  $P$ . Diese Eigenschaft des Punktes  $V$  erfüllt nun auch der Punkt  $U$ . Somit schneidet die Ebene des Kreises  $\xi^2$  die Ebene  $P$  in der Geraden  $UV$ , und es ist diese Linie  $UV$  parallel mit der Tangente an  $o^2$  im Punkte  $X$ . — Da nun die Ebene des Kreises  $\xi^2$  die Ebene  $P$  in  $UV$ , die Kugel aber die Ebene  $P$  in dem Kreise  $o^2$  schneidet, so folgt, dass die gemeinsamen Schnittpunkte von  $UV$  und  $o^2$  auf  $\xi^2$  liegen. Sie sind die Punkte  $X_1, X_2$ , welche mit  $O^r$  denselben Abstand von  $X$  haben, also auf dem Axenkreise  $x^2$  liegen müssen. — Für die Punkte  $Y_1, Y_2$  benutze man den Kugelkreis  $\eta^2$  durch  $O^r$ , der in  $Y$  sein

sphärisches Zentrum hat. (Seine mit  $\xi^2$  gemeinsame Sehne liegt in der Geraden  $O^rU$ .) Seine Ebene geht durch  $U$  und  $W$ , u.s.f. — Auch diese Punkte  $X_1, X_2, Y_1, \dots$  sind sämtlich reell. Denn für das spitzwinklige Dreieck  $XYZ$  müssen die Verbindungslinien der drei Höhenfusspunkte den dem Dreiecke umschriebenen Kreis notwendig schneiden, weil jene Punkte im Innern des Kreises liegen.

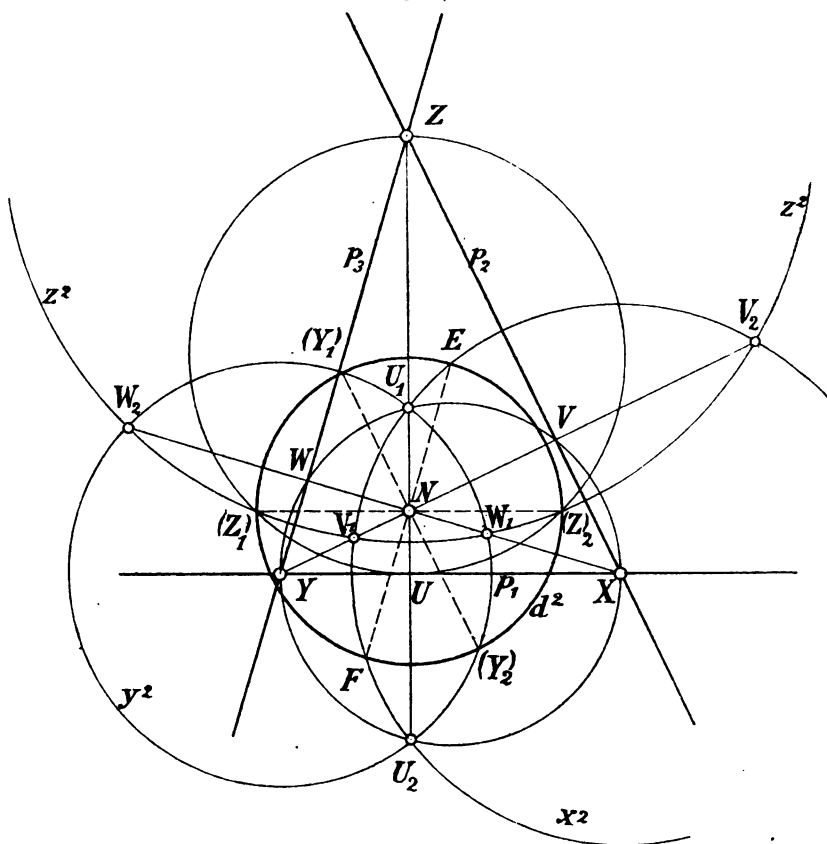
(Ohne Rücksicht auf die Anwendung mag noch folgende Eigenschaft der Figur hervorgehoben werden. Neben  $\xi^2, \eta^2$  besteht noch ein Kreis  $\zeta^2$  vom Zentrum  $Z$ , der ebenfalls durch  $O^r$  geht. Die Ebenen dieser drei Kreise  $\xi^2, \eta^2, \zeta^2$  schneiden sich in den drei Geraden  $Q^rU, O^rV, O^rW$ , welche sich auf die Ebene  $P$  orthogonal als  $NU, NV, NW$  projizieren. Die drei Tangentialebenen der Kugel in  $X, Y, Z$  schneiden sich in drei mit  $O^rU, O^rV, O^rW$  parallelen Geraden, welche  $P$  in den Schnittpunkten von je zwei jener drei Tangenten an  $o^2$  in  $X, Y, Z$  schneiden. Der Schnittpunkt der drei Tangentialebenen liegt in der aus dem Kugelmittelpunkt auf die Ebene  $P$  gefällten Senkrechten, welche  $P$  im Zentrum  $M$  des Kreises  $o^2$  trifft. Also ist  $M$  die Orthogonalprojektion des Schnittpunktes der drei Tangentialebenen. Seine Verbindungslinien mit den Ecken des  $o^2$  umschriebenen Dreiecks, mit  $X, Y, Z$  als Berührungspunkten, sind mit den Höhen des Spurendreiecks parallel.)

Für die Konstruktion der Axenkreise  $x^2, y^2, z^2$  ergeben sich aus vorstehendem folgende Sätze: Zwei Axenkreise schneiden sich (rechtwinklig) auf der zu der Verbindungslinie der Zentra als Dreiecksseite gehörigen Höhe und zugleich auf dem Kreise, welcher diese Dreiecksseite zum Durchmesser hat. Jeder Axenkreis und die Verbindungslinie der Höhenfusspunkte auf den vom Zentrum ausgehenden Dreiecksseiten schneiden aus den dem Spurendreiecke umschriebenen Kreise dieselben beiden Punkte.

17. Durch sein Spurendreieck  $XYZ$  ist das orthogonale Trieder  $O^rXYZ$  völlig bestimmt. Der Höhenschnitt  $N$  des Spurendreiecks ist die Orthogonalprojektion des Scheitels auf

die Ebene dieses Dreiecks. Der bezügliche Abstand  $OrN$  soll in Zukunft als die **Distanz**  $d$  bezeichnet werden. Schlägt man um  $N$  einen Kreis  $d^2$  vom Radius  $d$ , so soll er fortan der **Distanzkreis** (des Trieters in  $P$ ) heissen.

Fig. 31.



Sind die Axenkreise  $x^2, y^2, z^2$  gefunden, so findet man den Distanzkreis als denjenigen Kreis, welcher von den Axenkreisen im Durchmesser geschnitten wird. Dreht man nämlich das bei  $N$  rechtwinklige Dreieck  $OrNX$  um die in  $P$  liegende Kathete  $NX$  in die Ebene  $P$  hinein, so gelangt  $Or$  nach  $E$  oder  $F$  (Fig. 31). Weil alsdann  $XE = XO = XF$ ,

so liegen  $E$  und  $F$  auf dem Axenkreise  $x^2$ . Da ferner  $NE = NF = d$ , so sind  $E$  und  $F$  auch auf  $d^2$  gelegen. Dabei ist  $EF$  ein Durchmesser des Distanzkreises. — Dasselbe Beweisverfahren gilt auch bezüglich der Schnittpunkte des Distanzkreises mit den übrigen Axenkreisen. — Das Dreieck  $XO^rW$  ist bei  $O^r$  rechtwinklig, denn die Axe  $XO^r$  und die Ebene aus  $O^r$  nach  $p_3$  sind in rechtwinkliger Lage. Wird dieses Dreieck um  $XW$  herabgeklappt, so entsteht  $XEW$  oder  $XFV$ . Es folgt so, dass die Punkte  $E$  und  $F$  auf dem Kreise liegen, welcher die Höhe  $XW$  zum Durchmesser hat. Die Axenkreise und die über den Höhen des Spurendreiecks als Durchmesser konstruierten Kreise schneiden den Distanzkreis in denselben Punktpaaren. Die Benutzung dieser Hilfskreise von den Durchmessern  $ZU$ ,  $YV$ ,  $XW$  liefert die bequemste Konstruktion der Distanz. In der Regel wird später der Kreis über  $ZU$  mit der Parallelen aus  $N$  zu  $p_1$  geschnitten werden. Diese Schnittpunkte haben von  $N$  die Entfernung  $d$ .

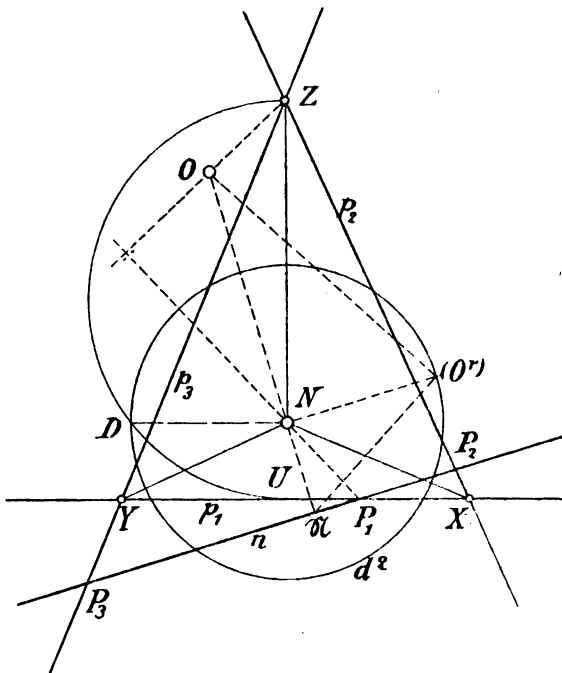
(Wenn man die Ebene  $x^ry^r$  oder  $(xy)^r$  um  $p_1$  umlegt, so gelangt  $O^r$  nach  $U_1$  oder  $U_2$ . Bei einer anderen Umlegung, nämlich um  $ZNU$ , gelangt  $O^r$  nach  $(Z)_1$  oder  $(Z)_2$ . Es folgt, dass  $U_1, U_2, (Z)_1, (Z)_2$  auf einem Kreise liegen, dessen Zentrum in  $U$  liegt. [ $UU_1, UU_2, U(Z)_1, U(Z)_2$  sind die vier Umlegungen der Strecke  $UO^r$ , bezüglich um  $XUY$  und um  $UNZ$  ausgeführt.] Der mit dem Radius  $UU_1$  oder  $UU_2$  um  $U$  beschriebene Kreis schneidet den Distanzkreis im Durchmesser. Dieselbe Eigenschaft kommt auch den Kreisen über  $V_1V_2$  und über  $W_1W_2$  zu.)

18. Das orthogonale Trieder  $O^rx^ry^rz^r$  sei durch sein Spurendreieck  $XYZ$  in  $P$  gegeben. Der Höhenschnitt  $N$  und der Distanzkreis  $d^2$  seien konstruiert worden.

Eine beliebige Gerade durch den Scheitel  $O^r$  des Trieders, welche  $P$  in  $O$  schneiden mag, erzeugt eine Normalebene  $N$ , durch  $O^r$  gelegt, welche sämtliche in  $O^r$  auf  $O^rO$  errichteten Senkrechten enthält. Es soll die Spur  $n$  der Ebene  $N$  in  $P$  konstruiert werden.

Wie in Fig. 32 kann man zu diesem Zwecke  $ON$  ziehen, ferner den dazu senkrechten Radius  $N(O^r)$  des Distanzkreises; das in  $(O^r)$  auf der Verbindungslinie mit  $O$  errichtete Perpendikel schneide  $ON$  in  $\mathfrak{N}$ . Darauf ist die in  $\mathfrak{N}$  auf  $ON$  errichtete Senkrechte die verlangte Spur  $n$  der Ebene  $N$ .

Fig. 32.



Diese Normalenspur  $n$  zu der gegebenen Richtung  $O^rO$  schneidet  $p_1, p_2, p_3$  bezüglich in  $P_1, P_2, P_3$ , welche Punkte nunmehr einzeln konstruiert werden sollen. Um  $P_1$  zu finden, hat man einfach aus  $N$  auf  $OZ$  eine Senkrechte zu fallen, ihr Schnitt mit  $p_1$  wird  $P_1$  sein. Ebenso liegen bezüglich  $P_2, P_3$  auf den Senkrechten aus  $N$  auf  $OY$  und  $OX$ . — Der Beweis, etwa bezüglich  $P_1$ , ist in folgender Weise zu führen. Die Normalebene, in  $O^r$  zu  $O^rZ$  errichtet, hat die Spur  $p_1$  und es soll  $n$  die Spur der in  $O^r$  zu  $O^rO$  errichteten Normalebene sein. Dann muss die Schnittlinie  $O^rP_1$  der beiden Normalebenen



$Orp_1$ ,  $Orn$  auf der Ebene  $OrZO$  senkrecht stehen und die Orthogonalprojektion  $NP_1$  der Schnittlinie auf der Spur  $OZ$ , überall in Bezug auf  $P$  als Bildebene. — Diese Konstruktion giebt die Spur  $n$  der Normalebene ohne Benutzung des Distanzkreises. Auch ist sie direkt umkehrbar. (Diese umkehrbare Beziehung zwischen dem Punkte  $O$  und der Geraden  $n$  ist diejenige der Polarreciprozität mit Bezug auf den imaginären Kreis vom Zentrum  $N$  und vom Radius  $d\sqrt{-1}$ .)

### Dritter Teil.

#### Die orthogonale Axonometrie.

19. Die Axonometrie ist aus dem Bedürfnisse hervorgegangen, ein in Orthogonalprojektion durch Grund-, Auf- und Seitenriss dargestelltes Objekt auf eine beliebige Ebene des Raumes durch Parallelprojektion abzubilden. Die ursprünglichen drei Bildebenen haben nämlich zu dem Objekte eine spezielle Lage, wobei gewisse Linien und Flächen, die am Objekte vorzugsweise vorzukommen pflegen, sich als blosse Punkte, bezüglich Linien, projizieren. Währenddem die drei Hauptlagen der räumlichen ebenen Flächen, nämlich parallel mit den Projektionsebenen, sich einzeln in wahrer Grösse und Gestalt projizieren, ist der am Körper vorhandene Zusammenhang derselben gar nicht zur Darstellung gelangt.\*

Indem man nun das Objekt auf eine Ebene, die zu dem Objekte eine ganz willkürliche Lage hat, parallel projiziert, wird man erreichen können, dass in dem entstehenden Bilde alle Kanten und Flächen als ebensolche auftreten.

Die direkte Konstruktion dieses neuen Bildes aus den ursprünglichen Rissen bietet vor allem den grossen Nachteil,

---

\* Häufig wird deshalb den Rissen eine perspektive Ansicht beigefügt.

dass die neue Bildebene zu der Zeichnungsfläche (der Grundrissebene) eine schiefe Lage hat; um das Bild in der Zeichnungsfläche liegend zu erhalten, sind somit Drehungen notwendig. Dieses Verfahren wurde zunächst für die Orthogonalprojektion auf jene einzelne Ebene in folgender Weise abgekürzt. Die rechtwinkligen Koordinaten der Raumpunkte in Bezug auf die ursprünglichen Projektionsebenen als Koordinatenebenen projizieren sich als drei Systeme paralleler Linien von je gleicher Verkürzung. Man studiere deshalb den Zusammenhang zwischen den Bildern der Koordinatenachsen\* in der neuen Ebene und den Neigungswinkeln der Axen mit dieser Ebene. Die Cosinus dieser Winkel sind die bezüglichen Verkürzungsverhältnisse. Darauf verzeichne man jene Axenbilder in der Zeichnungsfläche und trage die einzelnen Punkte mit Hilfe der verkürzten (reduzierten) Koordinaten ein. Dementsprechend bezeichnet man nach Pohlke die Axonometrie als „die Methode, die Projektion eines Raumgebildes aus den Projektionen der Koordinaten seiner Punkte herzuleiten“. — Es zeigte sich, wie hier ebenfalls nachgewiesen werden soll, dass man das Bild des Axensystems willkürlich wählen kann, indem sich daraus die Verkürzungsverhältnisse bestimmen lassen, und dass umgekehrt durch die Verhältnisse der Verkürzungsverhältnisse, die man ebenfalls willkürlich festsetzen kann, die gegenseitige Lage der Axenprojektionen bestimmt ist, u. s. f.

Wenn die räumliche Axe  $x^r$  zu der Bildebene  $P$  unter dem Winkel  $\alpha$  geneigt ist, so wird eine auf  $x^r$  abgetragene Strecke  $e$  sich von der Länge  $e_x = e \cdot \cos \alpha$  projizieren. Um  $e_x$  aus  $e$  und  $\alpha$  zu konstruieren, wird man die auf dem Endschenkel des irgendwo in der Zeichnungsfläche verzeichneten Winkels  $\alpha$  abgemessene Strecke  $e$  auf den Anfangsschenkel orthogonal projizieren. Die Projektion wird  $e_x$  sein. Die Umkehrung dieser Konstruktion liefert  $e$ , wenn  $e_x$  und  $\alpha$  bekannt sind. Diese Konstruktion überhaupt kann als die

---

\* Die Koordinatenachsen sind die Schnittlinien jener drei rechtwinkligen Koordinatenebenen; sie sollen zusammen das Axensystem genannt werden.

Zeichnung des Massstabes jener Axe aufgefasst werden. Da im allgemeinen jede Axe einen besonderen Neigungswinkel ( $\alpha, \beta, \gamma$  für  $x^r, y^r, z^r$ ) zu der Bildebene hat, so wird man jeweilen drei solcher Massstäbe nebeneinander benutzen, wenn man das axonometrische Bild des Objektes aus den Koordinaten seiner Punkte zeichnen will.

Da man, wie bereits angegeben wurde, mit Hilfe jener Massstäbe zu Strecken des Bildes, deren Originale den Projektionsachsen parallel sind, die Originallängen ermitteln kann, so bietet nun das axonometrische Bild auch noch den Vorteil der Möglichkeit, solche Abmessungen in den Axenrichtungen dem Bilde entnehmen zu können.

Über die Schranken bei der Herstellung des Bildes, welche durch die Voraussetzung einer Orthogonalprojektion bedingt sind, hat man sich oft zum Teil hinweggesetzt. Auf drei beliebig gewählten Axenbildern hat man die Originallängen der bezüglich räumlichen Koordinaten selbst oder willkürliche, unabhängige Verkürzungen derselben abgetragen. Auch in dieser Weise erhält man erfahrungsgemäss mehr oder weniger gute Bilder, welche in sehr bequemer Weise die Abmessungen von Strecken in den Axenrichtungen gestatten. Bei technischen Zeichnungen bilden sie ein sehr bequemes Mittel für eine rasch auszuführende übersichtliche Darstellung. Offenbar handelt es sich hierbei keineswegs um eine Orthogonalprojektion des gegebenen Objektes oder einer ähnlichen Vergrösserung desselben, sondern, wie zuerst Pohlke, Schwarz und Reye\* bewiesen haben, um eine schiefe Parallelprojektion einer dem Objekte ähnlichen Raumfigur. — Man unterscheidet somit zwischen der erstgenannten orthogonalen Projektion, der orthogonalen Axonometrie und dieser schiefen Parallelprojektion, der schiefen Axonometrie.

Neben dem „axonometrischen Bilde“ werden für orthogonale wie für schiefe Axonometrie häufig die sogenannten

---

\* Schwarz: Elementarer Beweis des Pohlke'schen Satzes. Crelle's Journal LXIII, 1864.

Reye: Beweis von Pohlke's Fundamentalsatz. Züricher Vierteljahrsschrift, 1866.

axonometrischen Risse mitkonstruiert. Letztere sind für beide Fälle die Projektionen der drei Risse in den drei Koordinatenebenen auf die neueingeführte Bildebene  $P$  und mit der für das Objekt gewählten Projektionsrichtung.

Jeder Punkt des Raumes veranlasst nun im ganzen vier Bilder: Das axonometrische Bild und bezüglich den axonometrischen Grund-, Auf- und Seitenriss. Indem man das projizierende Parallelepipèd des Raumpunktes in Bezug auf die drei rechtwinkligen Projektionsebenen mitprojiziert, findet man die einfachen Beziehungen zwischen seinen vier Bildern in  $P$ . — Für die Raumgerade erhält man ebenfalls vier Bilder, dazu die Bilder der drei Spurpunkte, u. s. f. — Die Beziehungen zwischen diesen Bildern und „Spuren“ für Punkt, Gerade und Ebene werden als bekannt vorausgesetzt, ebenso die elementaren Konstruktionen, welche sich auf die Darstellung von Gruppen dieser Elemente, sei es in vereinigter oder in paralleler Lage, beziehen.

In der Regel wird es genügen, dass man sich auf das axonometrische Bild und einen der axonometrischen Risse (es soll später gewöhnlich der Grundriss diesen Vorzug erhalten), oder auf zwei Risse beschränkt. Für Ebenen wird man die Bilder aller drei Spuren im wesentlichen gleichmässig benutzen.

Handelt es sich um eine bestimmte „axonometrische Darstellung“ eines Objektes durch seine genannten vier Bilder in  $P$ , wobei namentlich auch die Projektionsrichtung bekannt sein soll, so muss man offenbar die geometrischen Konstruktionen, die man am Objekte ausgeführt denkt, in der Bildebene allein vollständig darstellen können. Herr Pelz,\* der diesen Versuch zuerst gemacht hat, beschränkt sich auf die orthogonale Axonometrie, und auch diese Durchführung kann keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen. Ferner sind die Resultate zumeist in einer Form hergeleitet, welche das Wesen dieser Konstruktionen als nicht einfacher Natur erscheinen lässt, was wiederum ihre Anwendung mühsam macht.

---

\* Wiener Sitzungsberichte, LXXXI, 1880; LXXXIII, 1881.

**20.** Drei rechtwinklige Projektionsebenen des Raumes, alle durch den Scheitel  $O^r$  gehend, mögen sich in den drei Axen  $x^r, y^r, z^r$  schneiden. Die Orthogonalprojektionen irgend eines Objektes bezüglich auf die Koordinatenebenen  $x^r y^r, x^r z^r, y^r z^r$  nennt man Grund-, Auf- und Seitenriss (oder die 1., 2., 3. Projektion). Hierauf werden das Objekt und jene drei Risse auf die Bildebene  $P$  orthogonal projiziert. Es entstehen das axonometrische Bild und die drei axonometrischen Risse des Objektes, welche zusammen die vier axonometrischen Bilder genannt werden sollen.

Ein Punkt  $A^r$  (oder  $A_r$ ) des Raumes und seine Risse  $A'_r, A''_r, A'''_r$  projizieren sich hierbei bezüglich als die Punkte  $A, A', A'', A'''$  in der Ebene  $P$ . Die Gerade  $g^r$  mit ihren räumlichen Rissen und Spuren  $g'_r, g''_r, g'''_r; S^r_1, S^r_2, S^r_3$  veranlasst die Bilder  $g; g', g'', g'''$  und  $S^g_1, S^g_2, S^g_3$  in der Ebene  $P$ . Endlich sollen  $s_1, s_2, s_3$  die Bilder der Spuren  $s^r_1, s^r_2, s^r_3$  einer Ebene sein. — Dass nicht immer alle axonometrischen Bilder berücksichtigt werden, ist bereits hervorgehoben worden. Beispielsweise genügt für einen Punkt die Angabe des Bildes  $A$  und des Grundrisses  $A'$ . Dadurch sind  $A'', A'''$  bestimmt, also auch  $A'_r, A''_r, A'''_r$  und auch  $A^r$ , sobald es sich um einen bestimmten Fall der orthogonalen Axonometrie handelt. Man darf somit, wie in Zukunft oft geschehen soll, von den Punkten  $A, A'; B, B'; \dots$ , von den Geraden  $a, a'; b, b'; \dots$  sprechen; es sind damit die betreffenden Elemente durch die Angabe dieser Bilder genügend bezeichnet. Häufig wird man sogar, um ein Element (Punkt, Gerade) zu bezeichnen, einfach nur dessen axonometrisches Bild nennen,  $P$  an Stelle von  $P, P'$ , bezüglich von  $P; P', P'', P'''$ , u.s.f. — Die Bilder der räumlichen Axen  $x^r, y^r, z^r$  werden mit  $x, y, z$  bezeichnet und, abweichend von der gewöhnlichen Regel das Bild des Scheitels  $O^r$  mit  $N$  (Normalenfusspunkt).

Das Objekt und den Raum überhaupt denkt man sich in starrer Verbindung mit dem Systeme  $O^r. x^r y^r z^r$ . Die räumliche Lage dieses eben genannten Axensystems sei bekannt. Von Elementen, die in  $P$  durch die genügende Anzahl von Bildern bestimmt werden, können leicht die räumlichen Lagen

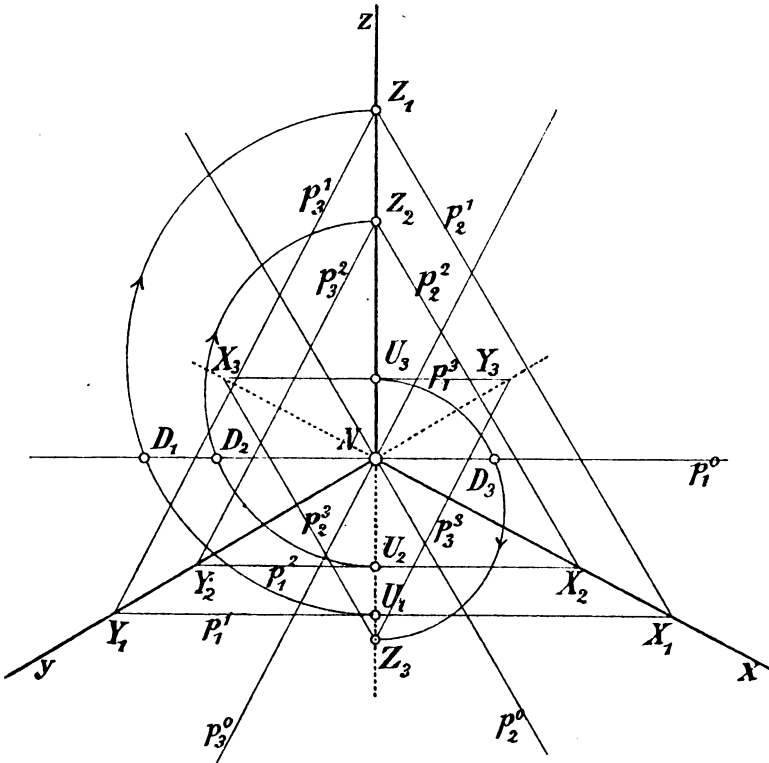
der Originale aufgefunden werden, und es ist hier überhaupt der Übergang vom Objekt zu der axonometrischen Darstellung, und umgekehrt, ein durchaus eindeutiger. Hieran wird im wesentlichen nichts verändert, wenn das System  $O^r x^r y^r z^r$  und damit das Objekt in der Projektionsrichtung beliebig verschoben werden, die Ebene  $P$  aber festbleibt. Hierbei bleiben die Bilder in  $P$  unverändert, aber das Spurendreieck  $XYZ$  (Nr. 16) ändert sich. Seine Ecken bleiben in den Bildern  $x, y, z$  der Axen. Solche Spurendreiecke  $XYZ, X_1 Y_1 Z_1, X_2 Y_2 Z_2, \dots$  sind ähnlich und in perspektiver Lage (ähnlich und ähnlich gelegen). In demselben Masse, in welchem sich die linearen Dimensionen (Seiten, Höhen etc.) der Spurendreiecke ändern, verändert sich auch die Distanz (Nr. 17). Die zugehörigen Tetraeder  $O^r XYZ, O_1^r X_1 Y_1 Z_1, \dots$  sind ähnlich.

Bei dieser Betrachtung ist es nun aber gleichgültig, ob das räumliche Axensystem verschoben und  $P$  festgehalten wird, oder ob das Axensystem festbleibt und  $P$  die entgegengesetzte Bewegung ausführt. Man hat nur nach der Verschiebung von  $P$  (in die Lagen  $P_1, P_2, \dots$ ) jedesmal die neuen Bilder wieder auf die ursprüngliche Projektionsebene orthogonal zu projizieren, so ändern sich diese Bilder ebenfalls nicht. Auch hier ändern sich die Spurendreiecke in der vorhin angegebenen Weise und es verhalten sich namentlich ihre linearen Dimensionen zu einander wie die zugehörigen Distanzen. — Gelangt  $P$  durch diese Parallelverschiebung successive nach  $P_1, P_2, \dots$ , so geht die Distanz bezüglich über in  $d_1, d_2, \dots$ . Die Distanz wird zu Null für die durch  $O^r$  gelegte Ebene  $P_0$ . Das Bild des Spurendreiecks dieser Ebene reduziert sich auf die durch den Punkt  $N$  zu  $p_1, p_2, p_3$  gezogenen Parallelen  $p_1^0, p_2^0, p_3^0$ . Die Benutzung der Ebene  $P_0$  an Stelle einer der Ebenen  $P_1, P_2, \dots$  neben der Zeichnungsfläche  $P$  bietet oft mancherlei Vorteil.

Auf ganz anderer Stufe stehen die beliebigen Verschiebungen (Transformationen) des räumlichen Axensystems und die dementsprechenden seines Bildes. Es soll später bei einigen Aufgaben von Parallelverschiebungen des Axensystems Gebrauch gemacht werden, wobei der Scheitel  $O^r$  nach einem bestimmten Punkte des Raumes verschoben wird.

21. Neben der Zeichnungsfläche werden alle zu ihr parallelen Ebenen  $P, P_0, P_1, \dots$  ebenfalls als Bildebenen betrachtet und es ist gleichgültig, welche dieser Ebenen als die Zeichnungsfläche angesehen wird. Fig. 33 enthält die Bilder der Spurendreiecke von einigen dieser Ebenen. Die Ecken

Fig. 33.



sind mit  $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \dots$  und die Seiten mit  $p_1^1, p_2^1, p_3^1; p_1^2, p_2^2, p_3^2; \dots$  bezeichnet. Die ersten Spuren  $p_0^1, p_1^1, p_2^1, \dots$  stehen auf dem Bilde  $z$  senkrecht, die zweiten Spuren  $p_0^2, p_1^2, p_2^2, \dots$  auf  $y$  und die dritten  $p_0^3, p_1^3, p_2^3, \dots$  auf  $x$ .

Um die gegenseitigen (senkrechten) Abstände dieser Ebenen  $P_0, P_1, P_2, \dots$  zu finden, wird man die zugehörigen Distanzen konstruieren. Dabei darf man diese Ebenen der

Reihe nach als mit der Zeichnungsfläche zusammenfallend denken, zunächst also  $P_1$  oder die Ebene  $X_1Y_1Z_1$ . Der über  $Z_1U_1$  als Durchmesser beschriebene Kreis schneidet  $p_1^0$  in  $D_1$  und in seinem orthogonal-symmetrischen Punkte in Bezug auf  $z$  (Nr. 17). Darauf ist  $ND_1 = d_1$  die Distanz der Ebene  $P_1$ , nämlich ihr senkrechter Abstand vom Scheitel  $O^r$ . — In gleicher Weise würde man diese Distanzpunkte  $D_2$  für  $P_2$ ,  $D_3$  für  $P_3$ , ... konstruieren können. Für  $P_0$  fällt  $D_0$  in  $N$  und ist  $d_0 = 0$ .

Damit die Benutzung dieser Distanzpunkte in einfacher und eindeutiger Weise vor sich gehen kann, ist folgende Auseinandersetzung nötig. Die Ebene  $P_1$  hat, wie bereits erwähnt, in  $p_1^0$  den Distanzpunkt  $D_1$ , daneben noch einen zweiten auf der entgegengesetzten Seite von  $N$ . Bezeichnet man ihn mit  $D_1^*$ , so könnte man in gleicher Weise  $ND_1$  oder  $ND_1^*$  als Distanz der Ebene  $P_1$  betrachten (und so weiter für alle Ebenen  $P$ ). Diese Distanzen sind entgegengesetzt gleich. Das hängt damit zusammen, dass der räumliche Scheitel  $O^r$  jedesmal um die Distanz über oder unter  $N$  liegend gedacht werden kann; die räumlichen Axen können in jeder solchen Zeichnung von  $X, Y, Z$  aus nach oben oder nach unten zusammenlaufend gedacht werden. (Über die Wirkung in Bezug auf das Bild vergleiche Nr. 47). Angesichts dieser doppelten Möglichkeit wird man sich für die eine oder die andere Annahme entschliessen. Ebenso wird man von jenen symmetrischen Distanzpunkten in  $p_1^0$  je nur den einen wählen und über den Strecken  $Z_1U_1, Z_2U_2, \dots$ , wie in Fig., je nur den einen Halbkreis verzeichnen. Die Auswahl ist sehr leicht zu treffen, denn es werden jetzt die Linien  $U_1D_1, U_2D_2, U_3D_3, \dots$  sämtlich parallel (ebenso wie  $Z_1D_1, Z_2D_2, \dots$ , u. s. f.). Alle die Bogen (Halbkreise)  $U_1D_1Z_1, U_2D_2Z_2, \dots$  haben jetzt übereinstimmenden Sinn (in Fig. denjenigen des Uhrzeigers). — Die Halbkreise für Spurendreiecke, welche auf derselben Seite von  $O^r$  aus liegen (wie in Fig. für  $P_1$  und  $P_2$ ) haben  $N$  zum äusseren Ähnlichkeitspunkte. Zwei Halbkreise, die zu Ebenen  $P$  gehören, die auf verschiedener Seite von  $O^r$  aus gelegen sind (wie in Fig. zu  $P_1$  und  $P_3$ ) haben  $N$  zum inneren Ähnlichkeitspunkt.



Sind die Distanzpunkte (in  $p_1^0$ ) in dieser Weise konstruiert worden, so findet zudem folgendes statt. Man denke sich die Ebenen  $P_0, P_1, P_2, \dots$  mit der Geraden  $O^*N$  geschnitten, dann  $O^*N$  um  $O^*$  gedreht, bis sie parallel mit  $p_1^0$  zu liegen kommt, so werden sich die so gedrehten Schnittpunkte mit  $P_0, P_1, P_2, \dots$  genau in  $D_0 = N, D_1, D_2, \dots$  projizieren. Allgemein gilt somit die Regel, dass die so konstruierten Distanzpunkte  $D_i, D_k$  zweier Ebenen  $P_i, P_k$  voneinander um den Abstand dieser Ebenen entfernt sind. Die Abstände zwischen den Distanzpunkten stimmen mit den Abständen zwischen den zugehörigen Bildebenen nach Sinn und Grösse überein. Die Entfernung  $D_i D_k$  der Distanzpunkte irgend zweier Bildebenen  $P_i, P_k$  mag man die diesbezügliche Zwischenstanz  $d_{i,k}$  nennen. Die Reihe der Distanzpunkte liefert auch alle Zwischendistanzen in eindeutiger Weise.

Dass diese Distanzpunkte der Bildebenen  $P$  gerade in  $p_1^0$  konstruiert werden, ist nebensächlich. Man könnte sie in  $p_2^0$  oder in  $p_3^0$  in ebenso einfacher Weise verzeichnen. Schliesslich liegen alle Distanzpunkte  $D$  und  $D^*$  einer der Ebenen  $P$  auf ihrem Distanzkreise  $d^2$  vom Zentrum  $N$ .

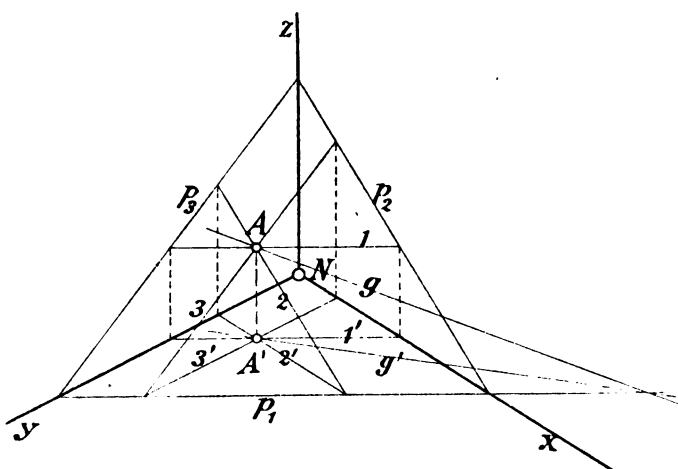
Anmerkung. Es kann vorkommen, dass die Höhen  $UZ$  der Spurendreiecke sehr gross sind, nämlich wenn  $x$  und  $y$  nahezu auf  $z$  senkrecht stehen. Um dennoch die Distanz  $ND$  bei unzugänglichem Punkte  $Z$  zu finden, ziehe man aus der Mitte von  $UX$  eine Parallele zu  $p_2$  (oder aus der Mitte von  $UY$  eine Parallele zu  $p_3$ ), bis  $z$  geschnitten wird. Dort ist das Zentrum des Kreisbogens  $UDZ$ . — Im allgemeinen braucht die Konstruktion des Distanzpunktes nur für eine Ebene  $P$  gemacht zu werden; die Distanzpunkte aller übrigen Ebenen  $P$  ergeben sich daraus durch das Ziehen von Parallelen.

**22.** Indem man in der Regel den axonometrischen Grundriss den übrigen Rissen vorzieht, hat man nun vor allem die Grundrisse der eben behandelten Bildebenenspurten aufzusuchen. Offenbar liegen die ersten Spuren räumlich in der Ebene  $x'y'r$ , weshalb die Linien  $p_1^0, p_1^1, p_1^2, \dots$  mit ihren Grundrissen

zusammenfallen. Weil ebenso die Originale der zweiten Spuren  $p_2^0, p_2^1, p_2^2, \dots$  in der Aufrissebene  $x^r z^r$  liegen, so müssen ihre Grundrisse in der Axe  $x^r$  und die Bilder der Grundrisse also in  $x$  liegen. Endlich sind die axonometrischen Grundrisse der dritten Spuren  $p_3^0, p_3^1, p_3^2, \dots$  sämtlich in der Axe  $y$ . (Die dementsprechende Bestimmung der axonometrischen zweiten und dritten Risse dieser Bildebenen Spuren geschieht nach demselben Verfahren.)

Hieran anschliessend ist es leicht, das Spürendreieck der durch einen Punkt  $A, A'$  gehenden Bildebene zu verzeichnen.

Fig. 34.

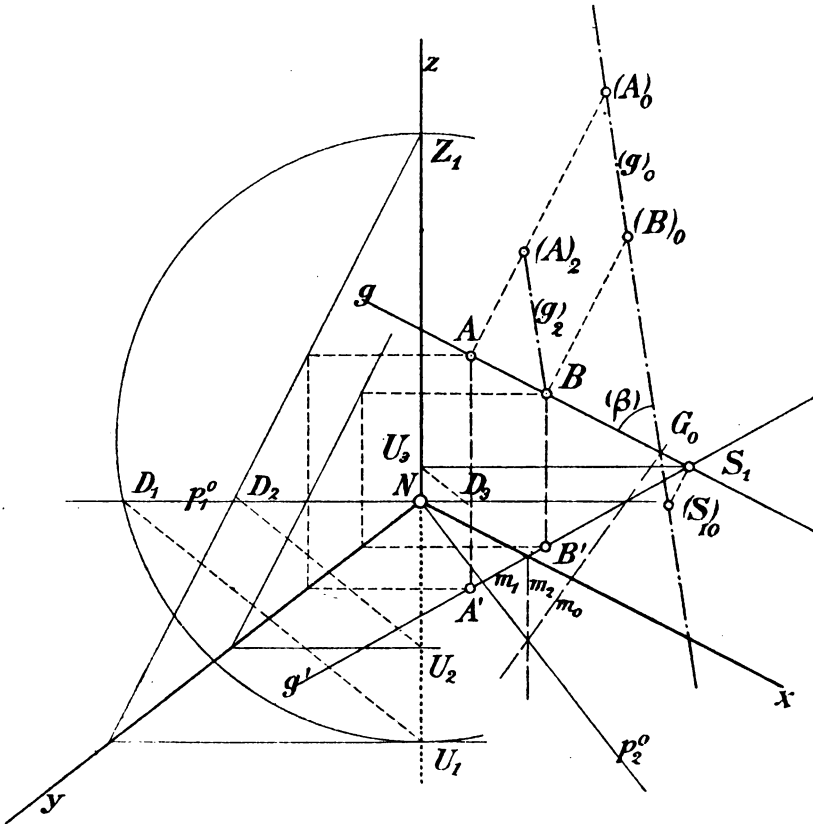


Legt man (Fig. 34) durch  $A$  und  $A'$  die Senkrechten 1, 1' zum Bilde  $z$ , so erhält man die Darstellung einer Geraden in der Ebene  $P$ , parallel zu deren ersten Spur  $p_1$ . Die (im Bilde) durch die zweite Spur dieser Geraden zu  $y$  gezogene Senkrechte ist  $p_2$  und die durch die dritte Spur senkrecht zu  $x$  gezogene Gerade wird  $p_3$  sein. Der Schnittpunkt von  $p_2$  mit  $x$  und der Schnitt von  $p_3$  mit  $y$  liegen auf  $p_1$ . — Ebenso kann man das axonometrische Bild 2 und den axonometrischen Grundriss 2' der zweiten Spurparallelen benutzen, oder endlich 3 durch  $A$  (senkrecht zu  $x$ ) und 3' durch  $A'$  (parallel zu  $y$ ) für eine dritte Spurparallele. — Diese drei Hilfslinien

werden später in derselben Bedeutung und Bezeichnung wiederkehren.

23. Als erste Fundamentalaufgabe soll die Umlegung der Geraden in irgend eine Bildebene behandelt werden.

Fig. 35.



Die Aufgabe, die Distanz zweier Punkte  $A, A'$ ;  $B, B'$  zu finden, ist darin enthalten.

In Fig. 35 sind auf der Geraden  $g, g'$  irgend zwei Punkte  $A, A'$  und  $B, B'$  gewählt. Es seien  $P_1, P_2$  die durch sie gehenden Bildebenen und  $D_1, D_2$  ihre Distanzpunkte. Trägt man die Distanzen  $ND_1, ND_2$  in  $A, B$  rechtwinklig zu  $g$  auf,

so entstehen  $(A)_0$ ,  $(B)_0$ , die Umlegungen der Punkte  $A$ ,  $B$  in die Bildebene  $P_0$ . Zur einfachen Erklärung denke man, es sei  $P_0$  die Zeichnungsfläche, es liegen dann  $A^r$ ,  $B^r$  bezüglich um die Distanzen  $ND_1$ ,  $ND_2$  vertikal über ihren Bildern  $A$ ,  $B$  und sie gelangen bei der Umlegung (Umkloppung des Trapezes  $ABB^rA^r$  um  $AB$  in  $P_0$ ) in der That nach  $(A)_0$ ,  $(B)_0$ . — Die Verbindungslinie von  $(A)_0$  mit  $(B)_0$  ist die in  $P_0$  umgelegte Gerade  $(g)_0$ , oder streng genommen, das Bild dieser Umlegung, weil die Ebene  $P_0$  nur ganz vorübergehend als mit der Zeichnungsfläche zusammenfallend vorausgesetzt wurde. Weiterhin ist der von  $(g)_0$  mit  $g$  gebildete Winkel ( $\beta$ ) die Umlegung des Neigungswinkels der Originalgeraden  $g^r$  mit den Bildebenen.

Der Schnittpunkt  $G_0$  von  $(g)_0$  mit  $g$  ist bei der Umlegung der Geraden augenscheinlich festgeblieben. Es ist dies der Spurpunkt der Geraden  $g^r$  in der Ebene  $P_0$ . In Fig. ist angegeben, wie diese Spur im voraus gefunden wird. Die horizontal projizierende (mit  $z^r$  parallele) Ebene der Geraden  $g^r$  hat  $m_1 = g'$ ,  $m_2$  zu Bildern der ersten und zweiten Spur. Schneidet man  $m_1$  mit  $p_1^0$  und  $m_2$  mit  $p_2^0$ , so entsteht als Verbindungslinie  $m_0$  das Bild der Schnittlinie der genannten Ebene mit  $P_0$ . Diese Linie  $m_0$  muss durch  $G_0$  gehen.

In Fig. 35 ist  $S_1$  der erste (axonometrische) Spurpunkt der Geraden  $g$ . In ihm schneiden sich  $g$  und  $g'$ . Die erste Spur der durch  $S_1$  gehenden Bildebene ist die durch  $S_1$  gezogene Senkrechte auf  $z$ . Sie schneidet  $z$  in  $U_3$ . Durch das Ziehen der Parallelen  $U_3D_3$  zu  $U_1D_1$  findet man  $D_3$  auf  $p_1^0$ . In  $S_1$  hat man endlich  $ND_3$  rechtwinklig an  $g$  abzutragen, um die Umlegung  $(S_1)_0$  zu erhalten. — Dass hier z. B.  $ND_1$  und  $ND_3$  ungleichen Sinn haben, bedeutet, dass die Punkte  $A^r$  und  $S_1^r$  auf entgegengesetzten Seiten von  $P_0$  liegen. Bei der Umlegung von  $g^r$  in  $P_0$  sind deshalb die Distanzen dieser Punkte (von der Ebene  $P_0$  gleich den Distanzen der Bildebenen  $P_1$ ,  $P_3$ ) nach entgegengesetzten Seiten bezüglich  $g$  abzutragen.

Fig. 35 enthält des weiteren die Umlegung  $(A)_2$   $B$  der Strecke  $A^rB^r$  in die durch  $B$  gehende Ebene  $P_2$ . Um  $(A)_2$  zu erhalten, hat man einfach die Zwischendistanz  $D_2D_1$  in  $A$

rechtwinklig zu  $g$  abzutragen. Denn es ist die Distanz zweier Punkte gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Orthogonalprojektion der Strecke und dessen andere Kathete dem Abstände der durch die beiden Endpunkte gehenden Bildebenen gleich ist.

Ebenso kann man die Gerade  $g^r$  in die beliebige Bildebene  $P$  vom Distanzpunkte  $D$  umlegen. Liegen nämlich die Punkte  $G_1^r, G_2^r, G_3^r, \dots$  der Geraden in den Bildebenen von den Distanzpunkten  $D_1, D_2, D_3, \dots$ , so hat man bezüglich in den Bildpunkten  $G_1, G_2, G_3, \dots$  rechtwinklig zu  $g$  die Zwischendistanzen  $DD_1, DD_2, DD_3, \dots$  aufzutragen und zwar nach je gleichem oder entgegengesetztem Sinn, je nachdem die Zwischendistanzen gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben (s. Fig. 36). Die Endpunkte der so abgetragenen Strecken sind die (Bilder der) Umlegungen  $(G_1), (G_2), \dots$  der Punkte  $G_1^r, G_2^r, \dots$  in die Ebene  $P$ . Selbstverständlich sind hierbei die Reihen  $D, D_1, D_2, \dots; G, G_1, G_2, \dots$  und  $G, (G_1), (G_2), \dots$  ähnlich.

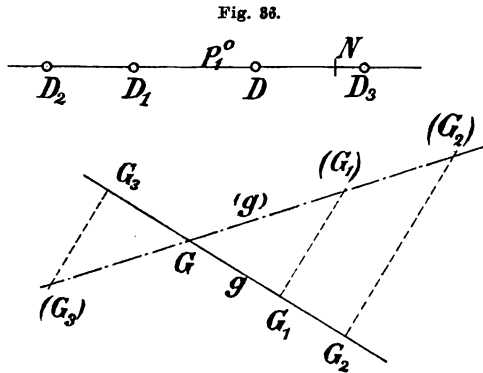
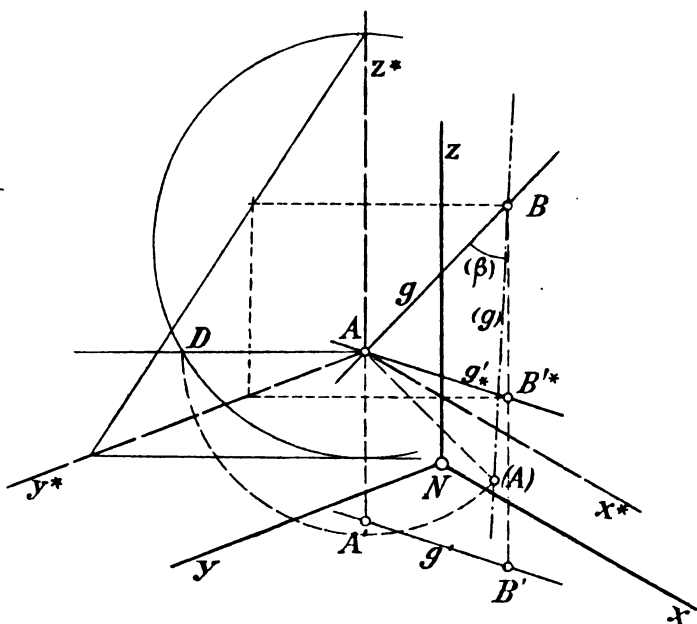


Fig. 37 (S.70) stellt die Bestimmung der wahren Länge einer Strecke  $A^r B^r$  und des Winkels  $\beta^r$  ihres Trägers mit den Bildebenen dar. Das Axensystem  $O^r. x^r y^r z^r$  vom Bilde  $N. xyz$ , auf welches beide Punkte  $A, A'; B, B'$  bezogen sind, ist so parallel verschoben worden, dass der Scheitel nach  $A$  gelangt. Es ändert sich hierdurch der Grundriss der Geraden, welcher in die damit parallele und gleiche Linie  $AB'^*$  übergeht. Das neue Axenbild ist  $A. x^* y^* z^*$ . In Fig. hat man die durch  $B, B'^*$  gehende Bildebene; bezogen auf das verschobene Axensystem, gelegt und deren Distanzpunkt  $D$  bestimmt. Bringt man die Distanz  $AD$  nach  $A(A)$  in die senkrechte Lage zu

$AB$ , so sind  $(A)$  die Umlegung von  $A$  und  $(A)B = (g)$  die Umlegung des Trägers der Strecke in die durch  $B$  (eigentlich  $B'$ ) gehende Bildebene. Weiter ist  $(A)B$  die wahre Länge der Strecke  $A'B'$  und der von  $(g)$  mit  $g$  gebildete Winkel  $(\beta)$

Fig. 37.



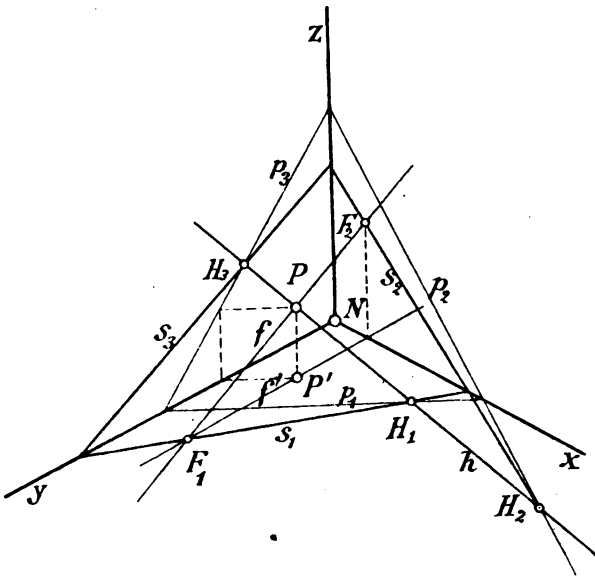
ist dem Neigungswinkel des Trägers  $g'$  mit den Bildebenen gleich.

24. Die unbegrenzte Ebene  $E'$  des Raumes schneidet die drei räumlichen Projektionsebenen in ihren drei Spurlinien  $s'_1, s'_2, s'_3$ , deren Bilder  $s_1, s_2, s_3$  in  $P$  sich paarweise auf den Axen  $x, y, z$  schneiden. Die unbegrenzte Ebene wird durch ihre (axonometrischen) Spuren  $s_1, s_2, s_3$  dargestellt, wobei die Angabe zweier derselben genügt.

Schneidet man (Fig. 38, S. 71) diese Ebene  $s_1, s_2, s_3$  mit der beliebigen Bildebene  $P (p_1, p_2, p_3)$ , so entsteht eine mit  $h$  bezeichnete Linie von den (axonometrischen) Spuren  $H_1, H_2, H_3$ .

Die Originallinie  $h^r$  ist eine in  $E^r$  gelegene, den Bildebenen parallele Gerade und soll eine Hauptlinie genannt werden. — Irgend eine, etwa in  $P$  zu  $h$  gezogene Senkrechte  $f$  ist das Bild einer Falllinie  $f^r$ . Die je unter sich parallelen Hauptlinien  $h^r$  und Falllinien  $f^r$  schneiden sich sowohl im Original als im Bilde unter rechten Winkeln. Die Neigungswinkel der

Fig. 38.

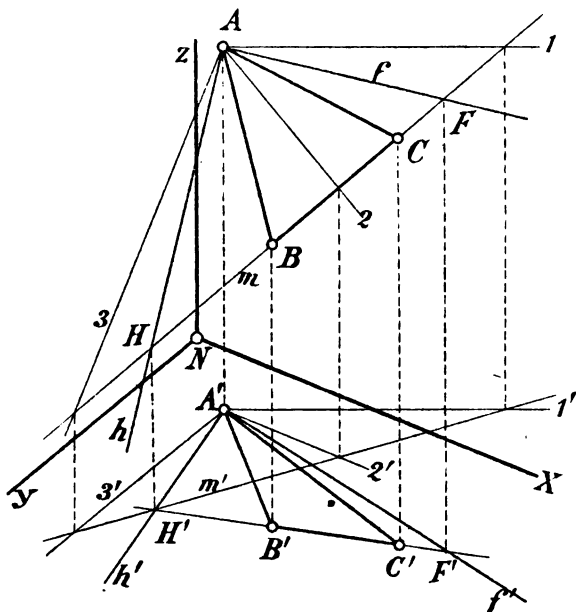


Falllinien  $f^r$  mit den Bildebenen sind gleich dem Neigungswinkel  $\alpha^r$  der Originalebene mit den Bildebenen und die Bestimmung dieses Winkels  $\alpha$  ist damit auf eine bereits gelöste Aufgabe zurückgeführt (Nr. 23). Steht ferner eine Gerade  $g^r$  des Raumes senkrecht auf dieser durch  $s_1, s_2, s_3$  dargestellten Ebene, so fällt ihr Bild  $g$  mit dem Bilde einer Falllinie zusammen. Ihr Neigungswinkel  $\beta^r$  zu den Bildebenen ist das Komplement des Winkels  $\alpha^r$ .

Durch die vollständige Angabe einer Falllinie ist die Ebene bestimmt. Räumlich ist dieses ohne weiteres einzusehen und es sollen (Fig. 38) in diesem Falle die Spuren konstruiert werden. Die gegebene Falllinie sei  $f, f'$ . Durch

den beliebig auf ihr gelegenen Punkt  $P, P'$  lege man in bekannter Weise (Nr. 22) die Bildebene  $P$  vom Spurendreieck  $p_1, p_2, p_3$ . Die in  $P$  gezogene Senkrechte  $h$  auf  $f$  schneidet  $p_1, p_2, p_3$  in den Spuren  $H_1, H_2, H_3$  dieser Hauptlinie. Sind nun noch  $F_1, F_2, F_3$  die Spuren von  $f$ , so verbinden die gesuchten Spuren  $s_1, s_2, s_3$  je die gleichnamigen Spuren von  $f$  und  $h$  (und schneiden sich paarweise auf  $x, y, z$ ).

Fig. 39.



Ist die Ebene nicht unbegrenzt, sondern handelt es sich um eine begrenzte ebene Figur, so lassen sich die Haupt- und Falllinien konstruieren, ohne dass die Spuren benutzt werden. In Fig. 39 sei ein Dreieck  $A'B'C'$  durch sein Bild  $ABC$  mit dem Grundrisse  $A'B'C'$  dargestellt. Durch die Ecke  $A$  zieht man die in Nr. 22 erwähnten Parallelen 1, 2, 3 zu den Bildebenen Spuren und durch  $A'$  deren Grundrisse  $1', 2', 3'$ . Alsdann liegen die durch 1,  $1'$ ; 2,  $2'$ ; 3,  $3'$  repräsentierten Geraden in der durch die Ecke  $A'$  gelegten Bildebene, deren Schnittlinie mit der Ebene des Dreiecks die durch  $A'$  gehende



Hauptlinie  $h'$  der letzteren Ebene ist. Projiziert man die Schnittpunkte von  $BC = m$  mit 1, 2, 3 in der Richtung  $z$  auf  $1', 2', 3'$  und verbindet man die entstehenden Grundrisse, so entsteht eine Gerade  $m'$ . Sie ist der Grundriss derjenigen Geraden, welche in der genannten Bildebene liegt und deren Bild in  $BC$  fällt. Es werden sich  $m'$  und  $B'C'$  in einem Punkte  $H'$  schneiden, zu welchem das Bild  $H$  auf  $m$  gehört. Alsdann ist offenbar  $AH = h$ ,  $A'H' = h'$ , womit die gesuchte Hauptlinie dargestellt ist. Legt man in  $A$  die Senkrechte  $f$  zu  $h$ , welche die Seite  $BC$  in  $F$  schneiden mag und ist  $F'$  der zu  $F$  gehörende Grundriss in  $B'C'$ , so ist durch  $AF = f$  und  $A'F' = f'$  die Falllinie des Punktes  $A$  dargestellt. — Offenbar kann man diese Konstruktion in mehrfacher Weise ausführen.

Anmerkung. Die Konstruktion der Haupt- und Falllinien ist dann überflüssig, wenn die Bilder zweier Geraden oder dreier Punkte u. s. f. der Ebene bekannt sind, sowie das Bild einer auf der Ebene senkrechten Geraden  $n'$ . Dann sind die Bilder der Hauptlinien auf  $n$  senkrecht, die der Falllinien mit  $n$  parallel.

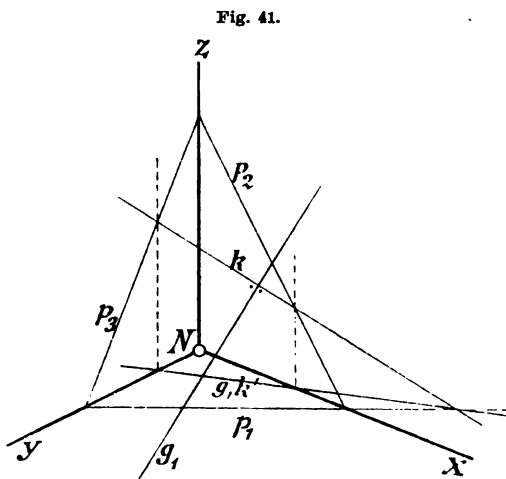
25. In vorangehender Nummer hat man für jede Ebene des Raumes die Haupt- und Falllinien, also die ausgezeichneten Rechtwinkelpaare, gefunden. Für die Koordinatenebene  $x^r y^r$  sind die Bilder der Hauptlinien ( $p_1^0, p_1^1, \dots$ ) rechtwinklig zu  $z$  gelegen, die der Falllinien mit  $z$  parallel. Für diese Ebene bilden  $x, y$  das Bild eines zweiten Rechtwinkelpaares und es lassen sich hieraus die Bilder aller Rechtwinkelpaare finden (Nr. 3 flg.). Indem man die Bilder der Rechtwinkelpaare der Ebene  $x^r y^r$  zeichnet, erhält man ein Hilfsmittel, um Ebenen und Geraden des Raumes in senkrechter Lage darstellen zu können. Sind die durch  $g, g', \dots$  dargestellte Gerade  $g^r$  und die Ebene  $E^r$  (mit  $s_1, s_2, s_3$  als Spurenbildern) aufeinander senkrecht, so sind („in  $xy, xz, yz$ “) die Paare  $g', s_1; g'', s_2; g''', s_3$  Bilder von Rechtwinkelpaaren. Somit sind hier die Richtungen  $g', g'', g'''$  als durch die Richtungen  $s_1, s_2, s_3$  bestimmt anzusehen und umgekehrt. —



$XP$ , also auch auf  $g$  senkrecht stehen muss. Man kann somit  $g_1$  auch in folgender Weise gewinnen: Aus dem („scheinbaren“) Schnittpunkte von  $p_2$  mit  $p_1^0$  fälle man eine Senkrechte auf  $g$  und schneide sie mit der durch  $X$  zu  $z$  gezogenen Parallelen. Der Schnittpunkt, mit  $N$  verbunden, giebt  $g_1$ . — Dass sich  $g_1$  in viel leichter Weise finden lässt, ist klar. Es sollte hier vielmehr gezeigt werden, welche Stellung dieser von Pelz angegebenen Konstruktion\* zuzuweisen ist.

**26.** Es besteht noch ein weiteres Hilfsmittel für die bequeme Konstruktion der Bilder von Rechtwinkelpaaren in den Koordinatenebenen, welches nachfolgend für die Grundrissebene erläutert werden soll. (Alle solchen Konstruktionen lassen sich selbstverständlich auf Rechtwinkelpaare in Ebenen, die den Koordinatenebenen parallel sind, anwenden.)

Wenn  $g^r$  eine Gerade der Grundrissebene  $x^r y^r$  bedeutet,  $g_1^r$  eine auf  $g^r$  senkrechte Gerade in der nämlichen Ebene liegend, so bilden  $g^r, g_1^r$  und die durch ihren



Schnittpunkt mit der  $z^r$ -Axe gezogene Parallele wieder ein orthogonales Axensystem. Somit sind  $g_1^r$  und die durch  $g^r$  parallel mit  $z^r$  gehende Ebene aufeinander senkrecht; letztere Ebene ist die horizontal-projizierende Ebene durch  $g^r$ . Für jede Bildebene  $P$  sind das Bild von  $g_1^r$  und die Spur  $k$  jener Ebene durch  $g^r$  ebenfalls aufeinander senkrecht (Fig. 41). Die

\* Wiener Sitzungsberichte, Bd. 18, II. Abt., S. 314, Fig. 1.

Gerade  $g$  ist der axonometrische Grundriss der Geraden vom Bilde  $k$ , es ist  $g = k'$ . Die Darstellung solcher Bilder  $g, g_1$  von Rechtwinkelpaaren basiert somit auf dem Satze: Sind  $g, g_1$  die Bilder zweier rechtwinkligen Linien einer mit  $x^r y^r$  parallelen Ebene und ist zugleich  $g$  der Grundriss der in irgend einer Bildebene  $P$  gelegenen Geraden  $k$  ( $g = k'$ ), so stehen die Bilder  $g_1$  und  $k$  aufeinander senkrecht. Der Satz ist umkehrbar; auch lassen sich darin  $g$  und  $g_1$  miteinander vertauschen.

In Fig. 42 hat man in einer mit  $x^r y^r$  parallelen Ebene aus dem Punkte  $A, A'$  auf die Gerade  $g^r$  die Senkrechte konstruiert, ohne Spuren zu benutzen. Die durch  $A, A'$  gelegte Bildebene  $P$  ist durch die Geraden 1, 1'; 2, 2'; 3, 3', Nr. 22,

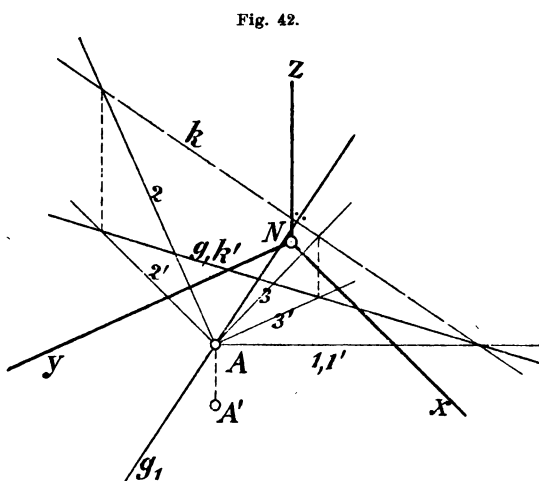


Fig. 42.

bestimmt. In ihr liegt  $k$ , vom Grundrisse  $k' = g$ , und es ist  $g_1$  senkrecht auf  $k$  zu ziehen. Hierbei ist die durch  $A, A'$  parallel zu  $x^r y^r$  gehende Ebene als Grundrissebene benutzt worden.

Fig. 43 (S. 77) giebt die Konstruktion des Bildes  $g_1$  der Senkrechten für den Fall, dass  $g$  und  $g_1$  durch  $N$  gehen. Auf  $g$  ( $g^r$  in der Ebene  $x^r y^r$  gedacht) errichtet man in  $N$  die Senkrechte  $k_0$ , wobei  $k_0$  das Bild der in  $P_0$  liegenden Geraden  $k_0'$  sein soll. Konstruiert man zu  $k_0$  den Grundriss  $k_0'$ , so ist damit  $g_1 = k_0'$  gefunden. Um in Fig. den Grundriss  $k_0'$  zu erhalten, hat man sich einer in  $P_0$  gelegenen Parallelen  $m_0$  zu  $p_1^0$  bedient.

Die hier entwickelte allgemeine Konstruktionsweise für gegenüberliegende Linienpaare in  $xy$  führt zu einem Ver-

fahren, welches als ein ganz spezielles bezeichnet zu werden verdient. Dasselbe rührt ebenfalls von Pelz her.\* In  $xy$  sei  $g$  eine durch  $N$  gezogene Gerade (Fig. 44). Man verzeichne

Fig. 43.

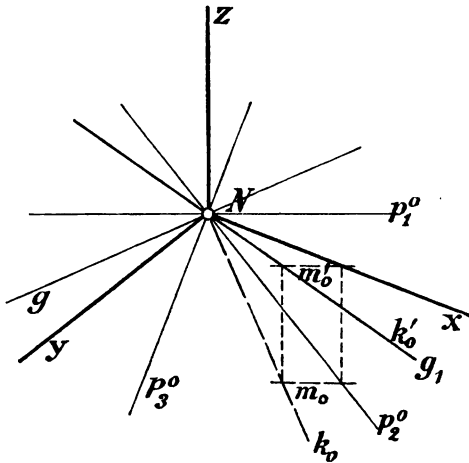
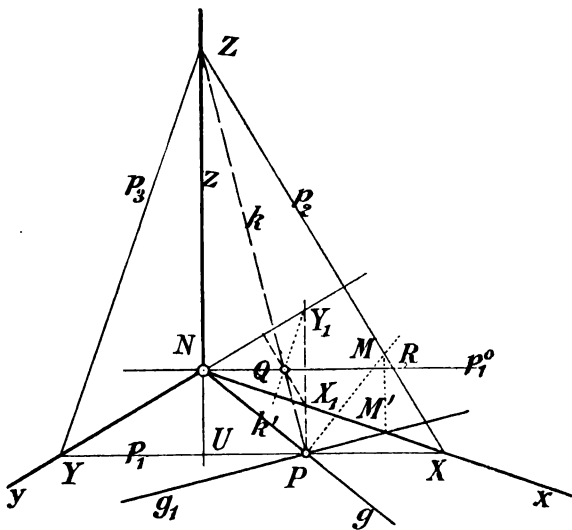


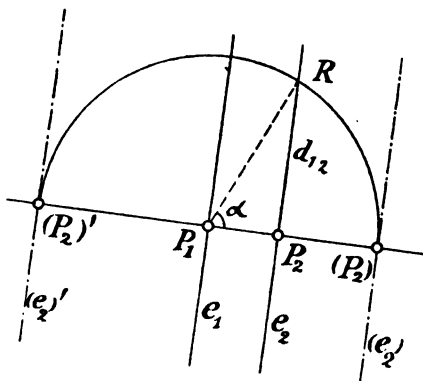
Fig. 44.



\* l. c., S. 314, Fig. 12.

die beliebige Bildebene  $P(p_1, p_2, p_3)$ ;  $p_1$  soll  $g$  im Punkte  $P$  schneiden. Dann ist  $PZ = k$  die Gerade der Ebene  $P$ , deren Grundriss  $k'$  in  $g$  fällt. Errichtet man, etwa in  $P$ , auf  $k$  eine Senkrechte  $g_1$ , so sind  $g, g_1$  zwei gegenüberliegende Linien in  $xy$ . — Diese Hilfslinie  $k$  geht nun durch den Punkt  $Q$ , den man dadurch erhält, dass man die aus  $P$  zu  $s$  gezogene Parallele mit  $x$  in  $X_1$  schneidet und durch  $X_1$  eine Parallele mit  $p_2$  zieht, letztere Linie schneidet  $p_1^0$  in  $Q$ . (Oder man ziehe aus  $P$  parallel mit  $s$  bis nach  $Y_1$  auf  $y$ , dann senkrecht zu  $x$  bis  $Q$  auf  $p_1^0$ ; es ist  $Q$  der Höhenschnitt des Dreiecks  $NX_1Y_1$ .) Um diese spezielle Eigenschaft der Figur zu beweisen, be-

Fig. 45.



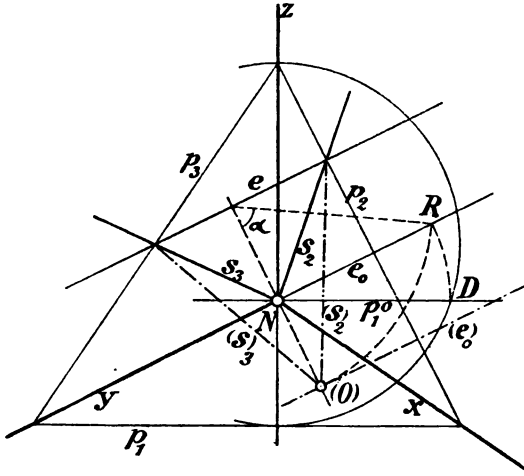
denke man, dass die Abschnitte  $XP, PU$  sich verhalten wie  $XX_1, X_1N$ , weil nämlich  $PX_1$  parallel mit  $s$  liegt. Letztere Abschnitte verhalten sich wie  $RQ, QN$ , weil  $X_1Q$  parallel  $p_2$  ist. Aus der Übereinstimmung der Verhältnisse von  $XP, PU$  und von  $RQ, QN$ , und weil  $p_1, p_1^0$  parallel sind, folgt, dass in der That

$PQ$  durch  $Z$  geht. — Die spezielle Konstruktion beruht also auf der Benutzung des Punktes  $Q$  an Stelle von  $Z$ .

27. Die Umlegung der Ebene geschieht unter Benutzung der Hauptlinien. Es sei  $e_1$  das Bild der in der Bildebene  $P_1$  liegenden Hauptlinie,  $P_2$  die durch einen beliebigen Punkt  $P_2'$  der Ebene gelegte Bildebene, auch seien  $D_1, D_2$  die Distanzpunkte dieser Bildebenen. Alsdann lässt sich die Ebene in folgender Weise in die Bildebene  $P_1$  (die man momentan als die Zeichnungsfläche ansehen mag) umlegen (Fig. 45). Aus  $P_2$  fälle man die Senkrechte  $P_2P_1$  auf  $e_1$ , trage die Zwischendistanz  $d_{12}$  (gleich  $D_1D_2$ ) von  $P_2$  aus parallel zu

$e_1$  (oder also in der Hauptlinie  $e_2$ ) nach  $P_2 R$  ab. Nun ist  $P_1 P_2$  das Bild einer Falllinie, welches mit der Umlegung derselben Linie zusammenfallen muss. Die Falllinie hat die Länge  $P_1 R$  und es befindet sich der Punkt  $P_2'$  und  $d_{12}$  vertikal über  $P_2$ . Beschreibt man mit dem Radius  $P_1 R$  um  $P_1$  einen

Fig. 46.

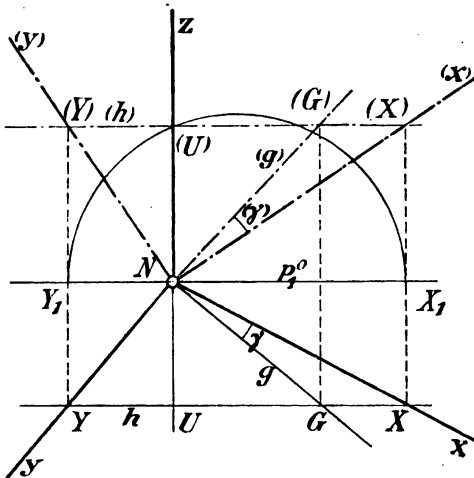


Kreis, welcher  $P_1 P_2$  in  $(P_2)$  und  $(P_2)'$  schneidet, so sind die eben genannten Punkte die beiden möglichen Umlegungen des Punktes  $P_2$ . Das Bild des ebenen Systems und seine Umlegung sind orthogonal centrisch-affin mit  $e_1$  als Axe und mit  $P_2(P_2)$ , bezüglich  $P_2(P_2)'$ , als entsprechenden Punkten. — Der Winkel  $RP_1 P_2$ , oder  $\alpha$ , ist offenbar gleich dem Neigungswinkel der Originalebene zu den Bildebenen.

Fig. 46 stellt den Vorgang bei der Umlegung einer durch  $O^r$  gehenden Ebene  $E^r$  dar. Gegeben sind die zweite und die dritte Spur,  $s_2$  und  $s_3$ . Die Umlegung soll in die Bildebene  $P(p_1, p_2, p_3)$  ausgeführt werden, also um die darin liegende Hauptlinie  $e$ . Im Übrigen ist die Umlegung  $(O)$  des Punktes  $O^r$  nach der oben beschriebenen Methode konstruiert worden. Die Umlegungen der gegebenen Spuren sind  $(s_2)$ ,  $(s_3)$ . Die in  $P_0$  liegende Hauptlinie  $e_0$  tritt als Hilfslinie auf und es ist  $(e_0)$  ihre Umlegung.

Die Umlegung der Koordinatenebene  $x'y'r$  in die Ebene  $P_0$  und um  $p_1^0$  kann in besonderer Weise ausgeführt werden. (Ähnlich und noch ein wenig einfacher wäre ihre Umlegung in  $P$  zu vollziehen.) Man wählt (Fig. 47) eine ihrer Hauptlinien  $XY = h$ , welche das Bild  $z$  in  $U$  schneidet. Das Dreieck  $X^r O^r Y^r$  ist bei  $O^r$  rechtwinklig, die Hypotenuse hat die Länge  $XY$  und es sind  $XU$ ,  $YU$  ihre Höhenabschnitte. Zieht

Fig. 47.



man daher  $XX_1$  und  $YY_1$  parallel mit  $z$  bis  $p_1^0$  und beschreibt man über  $X_1Y_1$  einen Halbkreis, welcher  $z$  in  $(U)$  schneidet, so ist  $N(U)$  die wahre Grösse der Höhe jenes Dreiecks. Ebenso ist  $N(U)$  gleich der Länge der Falllinie zwischen  $P_0$  und  $P$  (durch  $h$ ); sie ist zugleich die Umlegung dieser Fall-

linie. Endlich findet man die Umlegungen  $(X)$ ,  $(Y)$ ,  $(x)$ ,  $(y)$ ,  $(g)$  ... durch Benutzung der centrischen Affinität.

Eine fernere Umlegung ist in Fig. 48 (S. 81) vollständig dargestellt. Es ist ein Dreieck  $ABC$  gegeben. Der Scheitel  $O^r$  werde nach  $A$  verlegt, darauf haben das Bild  $ABC$  und der neue Grundriss  $A'B'C'$  die Ecke  $A = A'$  gemeinsam. ( $A'B'C'$  ist mit dem ursprünglichen Grundrisse kongruent und in paralleler Lage.) Soll die Umlegung in  $P_0$  geschehen, so hat man vor allem die in  $P_0$  liegende Hauptlinie  $h_0$  der Dreiecksebene zu konstruieren. Zu diesem Zwecke legt man durch die Seite  $BC$  die horizontal-projizierende Ebene von der ersten Spur  $m_1$  und der zweiten Spur  $m_2$ . Sie schneidet  $P_0$  in  $m_0$  (hierbei hat man die gleichnamigen Spuren  $m_1, p_1^0; m_2, p_2^0$  zum Schnitt gebracht und diese Punkte durch  $m_0$  verbunden). Es



**28.** In der orthogonalen Axonometrie ist ein einziger Spezialfall hervorzuheben. Es soll eine Axe,  $z'$ , den Ebenen  $P$  parallel laufen. Der Punkt  $Z$  des Spurendreiecks liegt unendlich fern;  $z, p_1, p_2$  sind unter sich parallel und senkrecht

### Weiler, Neue Behandlung der Parallelprojektionen.



gestellten Punkt  $P$  zu erhalten, hat man in Fig. eine mit  $y^r$  parallele Ebene benutzt, deren zweite Spur  $s_2$  willkürlich durch  $P''$  gezogen wird. Die Spur  $s_3$  ist parallel mit  $y$  und die Schnittlinie dieser Ebene mit  $P$  hat das Bild  $a$ . Durch  $P$  zieht man damit parallel  $a_1$  und schneidet  $s_2, s_3$  in zwei Punkten, aus welchen  $p_2^1, p_3^1$  parallel mit  $z$  zu ziehen sind. Die erste Spur  $p_1^1$  fällt in  $p_1$ .

Die Distanz der Bildebene  $P$  ergibt sich durch Umlegung der Grundrissebene. Der über  $XY$  als Durchmesser beschriebene Kreis wird von dem in  $N$  auf  $p_1$  errichteten Perpendikel in  $(O)_{xy}$  oder kurz in  $(O)$  geschnitten. Darauf ist  $N(O)_{xy}$  die Distanz der Ebene  $P$ . Ferner sind  $(O)X$  und  $(O)Y$  die Umlegungen  $(x)$  von  $x^r$  und  $(y)$  von  $y^r$ , welche bezüglich mit  $x$  und  $y$  die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  einschliessen (s. d. Einleitung). Währenddem  $\alpha, \beta$  komplementär sind, ist  $\gamma = 0$ . — Mit der Ebene  $x^r y^r$  sind in Fig. auch die Elemente  $P'$  und  $p_1^1$  umgelegt worden. — Lässt man  $P_1$  in die Zeichnungsfläche fallen und führt man so die Umlegung der Ebene  $x^r y^r$  aus, so gelangt  $O^r$  nach  $(O)_1$ ; es ist  $N(O)_1$  die Distanz der Ebene  $P_1$ .

Bezüglich der Ebene  $x^r z^r$  hat man nur  $x, z$  als das Bild eines Rechtwinkelpaares. Dreht man diese Ebene um  $p_2$ , bis sie in  $P$  fällt, so gelangt  $O^r$  nach  $(O)_{x.}$  (Der um  $X$  mit  $(x)$  als Radius beschriebene Kreis ist der Axenkreis  $x^2$  u. s. f.) Das Bild des ebenen Systems  $x^r z^r$  und dessen Umlegung sind orthogonal centrisch-affin mit  $p_2$  als Axe und  $N, (O)_{x.}$  als ein Paar entsprechender Punkte. — Verfährt man in derselben Weise mit der Ebene  $y^r z^r$ , so gelangt  $O^r$  nach  $(O)_{y.}$ . — Mit Hilfe dieser Umlegungen lassen sich die in den Koordinatenebenen auszuführenden Konstruktionen leicht vollziehen.

Wenn hier die Axen  $x^r y^r$  zu  $P$  gleich geneigt sind, also  $\alpha = \beta = 45^\circ$  wird, so ändert sich an diesen Betrachtungen im wesentlichen nichts. Für die Darstellung der Bilder von Rechtwinkelpaaren der Ebenen  $x^r z^r, y^r z^r$  hat man aber die Eigentümlichkeit, dass diese Bilder sich sämtlich decken, bezüglich parallel sind. (In dem allgemeinen Falle,  $\alpha \geq \beta$ ,



Ebene  $N$ . Durch die Hauptlinienbilder  $n_1, n_2$  ist die Ebene  $N$  genügend dargestellt. (Ihre Spuren  $s_1, s_2, s_3$  verbinden die gleichnamigen Spurpunkte der Hauptlinien  $n_1, n_2$ , welche bezüglich in  $p_1^1, p_1^2; p_2^1, p_2^2; p_3^1, p_3^2$  gelegen sind.) — Der Punkt  $R^r$ , dessen Umlegung in  $(R)$  und dessen Bild in  $R$  liegt, ist der Schnittpunkt der Normalebene mit  $g$ . Macht man  $Q(R)' = Q(R)$ , so ist offenbar  $P(R)'$  die wahre Länge des Abstandes des Punktes  $P$  von der Geraden  $g$ ,  $PR$  dessen Bild.

Die hier behandelte Lösung der Aufgabe geht davon aus, dass man mehrere Bildebenen einführt. Dieses Verfahren wird stets dann zu empfehlen sein, wenn nacheinander mehrere derartige Konstruktionen auszuführen sind, wobei dann möglichst die nämlichen Bildebenen und deren Distanzen benutzt werden. — Die Lösung der Aufgabe kann nun auch durch Benutzung einer Bildebene und einer Koordinatenebene oder zweier Koordinatenebenen ausgeführt werden, wie die nachfolgende Behandlung zeigt.

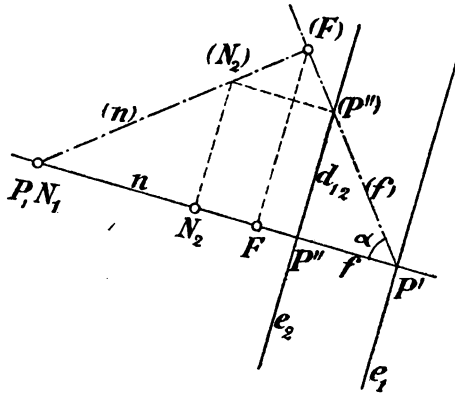
Durch den gegebenen Punkt  $P, P'$  lege man die Bildebene  $P(p_1, p_2, p_3)$  (Fig. 51, S. 86); die gegebene Gerade ist durch  $g, g'$  dargestellt. In  $P$  liegt die durch  $P$  gehende Hauptlinie  $h$  der gesuchten Normalebene und es stehen die Bilder  $h$  und  $g$  aufeinander senkrecht (Nr. 24). Die Schnittpunkte  $H_1, H_2, H_3$  von  $h$  mit  $p_1, p_2, p_3$  sind die Spurpunkte dieser Geraden  $h$ , durch welche notwendig die Spuren  $s_1, s_2, s_3$  der Normalebene gehen müssen. Ferner sind (in  $x^r y^r$ ) die Originale von  $g'$  und  $s_1$  ( $g'^r$  und  $s_1^r$ ) aufeinander senkrecht (Nr. 25). Somit steht  $s_1$  senkrecht auf  $h$ , dem Bilde der in  $P$  liegenden Geraden, deren Grundriss nach  $g'$  fällt (Nr. 26). Da von  $s_1$  bereits der Punkt  $H_1$  bekannt ist, so ist hiermit  $s_1$  bestimmt, und durch Benutzung ihrer Axenschnitte (in  $x$  und  $y$ ) und der Punkte  $H_2, H_3$  lassen sich  $s_2, s_3$  sofort angeben. — Die Fortsetzung dieser Konstruktion würde darin bestehen, dass man den Schnittpunkt  $D$  der Geraden mit der Ebene, darauf die wahre Länge  $PD$  bestimmt.

**30.** Den Abstand eines Punktes  $P$  von einer Ebene  $E$  zu bestimmen.



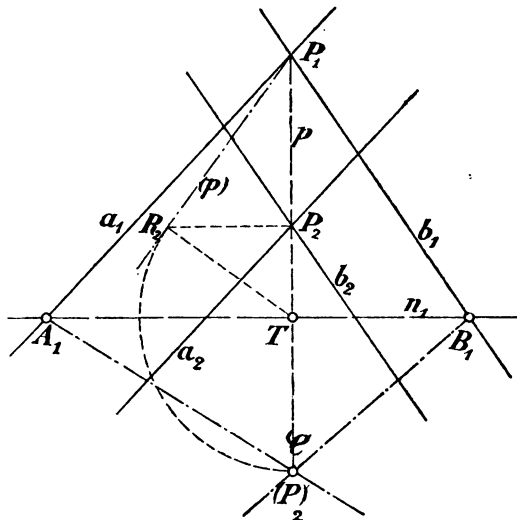
( $N_2$ ). Die Senkrechte aus diesem Punkte nach  $n$  schneidet  $n$  in dem gesuchten Punkte  $N_2$ .

Fig. 52.



**31. Der Neigungswinkel zweier Ebenen A, B lässt sich dadurch ermitteln, dass man zunächst die Hauptlinien  $a_1, b_1; a_2, b_2$  dieser Ebenen in zwei Bildebenen  $P_1, P_2$  darstellt. Schneiden sich diese Hauptlinien bezüglich in  $P_1, P_2$  (Fig. 53), so ist die Schnittlinie  $p$  der beiden Ebenen durch  $P_1$  und  $P_2$  (in  $P_1, P_2$ ) bestimmt. In  $P_2$**

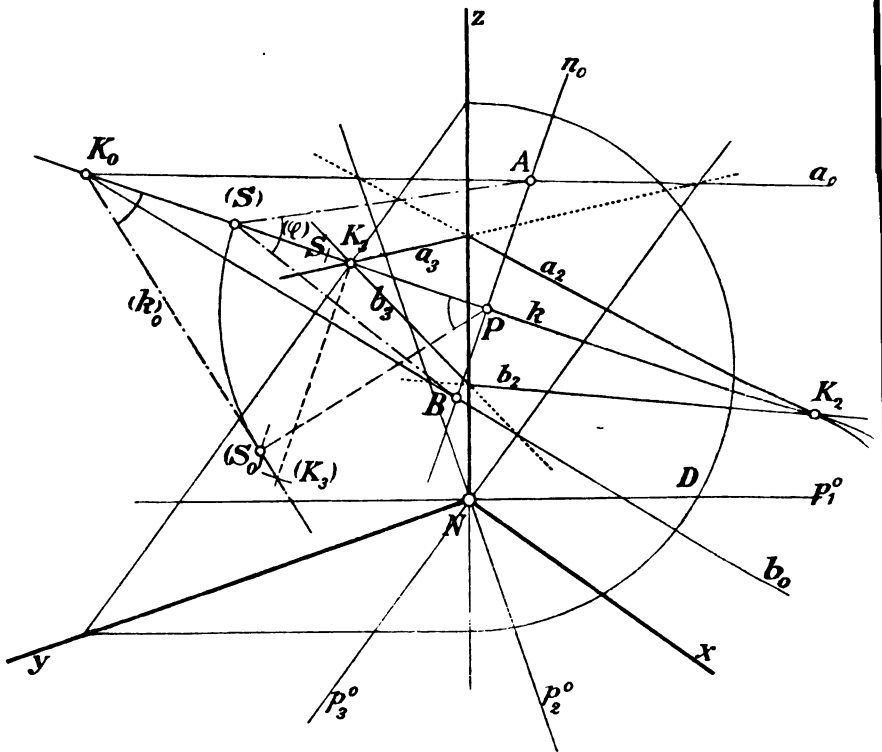
Fig. 53.



**trage man  $P_2 R_2$  von der Länge der Zwischendistanz rechtwinklig an  $p$  an, ziehe  $R_2 T$  rechtwinklig zu  $P_1 R_2 = (p)$ . In  $T$  errichte man auf  $p$  die Senkrechte  $n_1$ , sie ist die Spurlinie der in  $P_2$  auf  $p^r$  errichteten Normalenebene, in  $P_1$  liegend. Es schneide  $n_1$  die Linien  $a_1, b_1$  in  $A_1, B_1$ ; das Dreieck  $A_1 P_2 B_1$  enthält bei  $P_2$  den Neigungswinkel beider Ebenen A, B. Es erübrigt, dieses Dreieck und  $n_1$  gedreht in  $P_1$**

umzulegen. Der Scheitel  $P'_2$  des Winkels gelangt nach  $(P_2)$  und es sind  $(P_2)A_1$  und  $(P_2)B_1$  die Schenkel des umgelegten Neigungswinkels; diese genannten Linien und die gegebenen zwei Ebenen schliessen miteinander gleich grosse Winkel ein. — Auch hier mag man für die einfache Vorstellung des räum-

Fig. 54.



lichen Vorganges die Ebene  $P_1$  als die Zeichnungsfläche ansehen; es liegt dann das Original des Punktes  $P_1$  in  $P_1$  selbst, dasjenige von  $P_2$  und  $d_{12}$  vertikal über  $P_2$  u. s. f.

Die Bestimmung des Neigungswinkels  $\varphi$  ist in Fig. 54 vollständig ausgeführt; es sollen die zweiten Spuren  $a_2, b_2$  und die dritten Spuren  $a_3, b_3$  beider Ebenen A, B gegeben sein. Die Schnittpunkte  $K_2$  und  $K_3$  dieser Spuren sind be-



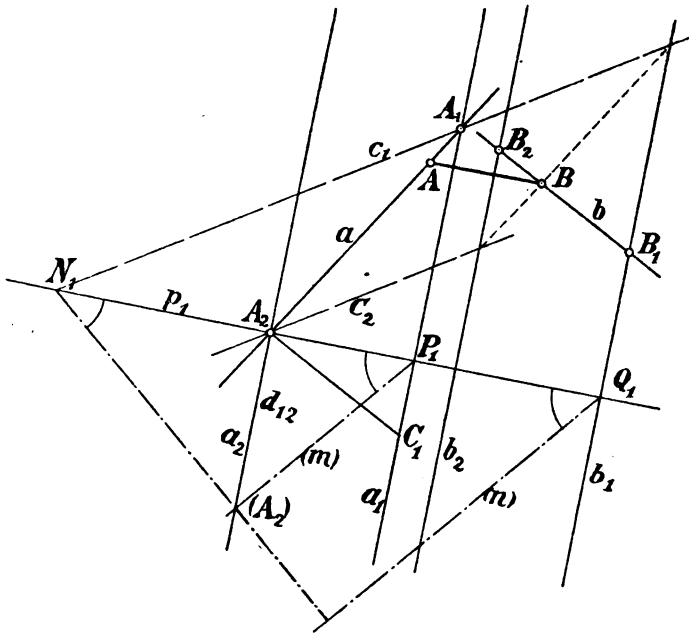
zöglich die zweite und dritte Spur der Kante  $k$  des fraglichen Flächenwinkels. Verbindet man die Schnittpunkte von  $a_2$  mit  $p_2^0$  und von  $a_3$  mit  $p_3^0$  miteinander, so entsteht die Schnittlinie  $a_0$  der Ebene A mit der Bildebene  $P_0$ . In gleicher Weise findet man die Hauptlinie  $b_0$  der Ebene B. Der Schnittpunkt  $K_0$  von  $a_0$  mit  $b_0$  ist der Spurpunkt der Linie  $k$  in der Bildebene  $P_0$ . — Man lege nun, um zu  $k$  eine Normalebene (Neigungswinkelebene) zu erhalten,  $k$  mit ihrer projizierenden Ebene  $k^rk$  um, etwa in  $P_0$ . Es wird dann  $K_0$  festbleiben. Als zweiten umzulegenden Punkt in  $k$  wird man einfach  $K_3$  wählen. Wie Fig. zeigt, ist  $D$  der Distanzpunkt der durch  $K_3$  gehenden Ebene  $P$ . Trägt man  $ND$  in  $K_3$  rechtwinklig zu  $k$  auf, so entsteht als Endpunkt dieser Strecke die Umlegung  $(K_3)_0$ . Ihre Verbindungslinie  $(k)_0$  mit  $K_0$  ist die Umlegung der Linie  $k$ . Errichtet man in irgend einem Punkte  $(S)_0$  von  $(k)_0$  die Senkrechte, welche  $k$  in  $P$  schneidet, darauf in  $P$  eine Senkrechte auf  $k$ , so entsteht die Spur  $n_0$  (in  $P_0$ ) einer Neigungswinkelebene. Für diese ist  $(S)_0$  die Umlegung des Scheitels des Neigungswinkels in  $(k)_0$ . Dreht man  $P(S)_0$  nach  $P(S)$  in  $k$ , so ist endlich  $A(S)B$  gleich  $(\varphi)$  der Neigungswinkel der Ebenen A, B in wahrer Grösse, nämlich ebenfalls in Umlegung in  $P_0$ .

**32.** Durch Zusammenstellung einer Geraden  $g$  und einer Ebene E entstehen ein Schnittpunkt  $D$  und ein Neigungswinkel  $\gamma$ . Führt man zwei Bildebenen  $P_1, P_2$  ein, so kann man  $g$  durch ihre Schnittpunkte  $G_1, G_2$  und E durch ihre Schnittlinien  $e_1, e_2$  mit diesen zwei Ebenen darstellen (Fig. 55, S. 90). — Um den Schnitt von  $g$  mit E einzutragen, würde man, eine durch  $g$  gehende Hilfsebene benutzend, durch  $G_1, G_2$  zwei parallele Linien ziehen, damit bezüglich  $e_1, e_2$  schneiden und die Schnittpunkte durch eine Gerade verbinden, welche  $g$  in dem verlangten Punkte schneidet. — Um den Winkel  $\gamma$  zu finden, verschiebe man  $G_1G_2$  parallel sich selbst, bis  $G_2$  nach irgend einem Punkte  $L_2$  in  $e_2$  fällt, womit  $G_1G_2$  nach  $L_1L_2$  gelangt. Nun bestimmt man  $\gamma$  als Winkel von  $l(L_1, L_2)$  mit  $E(e_1, e_2)$ . In dem Punkte  $L'_2$ , welcher um die Zwischendistanz



Parallelen ( $m$ ) und ( $n$ ) ist gleich dem Abstände der parallelen Ebenen  $A$ ,  $B$  und auch gleich dem kürzesten Abstände der Geraden  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ . — Um das Bild dieses kürzesten Abstandes zu erhalten, legt man in  $A_2$  die Normale  $A_2N_1$  zu der Ebene  $A$  und durch sie und  $a$  die Ebene  $C$  ( $c_1, c_2$ ). Letztere schneidet  $b$  in  $B$ . Aus  $B$  zieht man  $BA$  parallel mit

Fig. 56.



$p_1$ , bis  $a$  in  $A$  geschnitten wird; alsdann wird  $AB$  das Bild des kürzesten Abstandes sein.

Die Bestimmung des Abstandes von zwei parallelen Ebenen ist hier mitgelöst.

**34.** Durch die in der Koordinatenebene  $xy$  liegende Gerade  $s_1^{1,2}$  sollen die beiden Ebenen  $s_{1,2,3}^1$ ,  $s_{1,2,3}^2$ , welche zu der genannten Koordinatenebene unter dem Winkel  $\alpha$  geneigt sind, gelegt werden.

Die Kante des einen wie des anderen Flächenwinkels ist die gegebene erste Spur  $s_1$  oder  $XY$  (Fig. 57, S. 92). Die



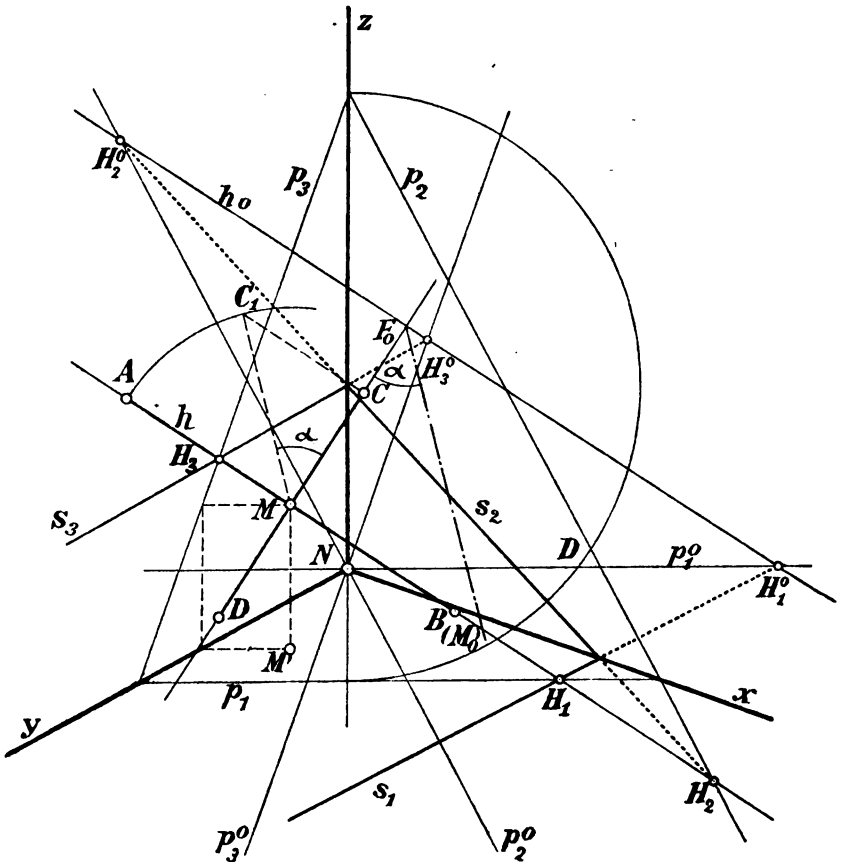
ferner in  $Y$  eine Parallele mit  $p_1^0$  bis nach  $z$ , verbindet diese Schnittpunkte, so wird  $XY$  in  $S$  geschnitten (Nr. 5). Auch ist  $NS = m$  das Bild des gemeinsamen Schenkels der beiden Neigungswinkel. Die durch  $O'$  gelegte Neigungswinkelebene  $Sz$  steht auf  $s_1$  senkrecht. Also stehen die Bilder ihrer Hauptlinien auf  $s_1$  senkrecht (Nr. 24, Anmerkung), z. B.  $h_0$ , ihre Hauptlinie in  $P_0$ . Die Umlegung der Neigungswinkelebene soll nun durch Drehung um  $h_0$  in  $P_0$  ausgeführt werden. Um hierbei  $(S)$  zu finden, legt man durch  $S$  eine Bildebene  $P$ , bestimmt ihre Distanz  $ND$ , welche man in  $S$  rechtwinklig an  $s_1$  abträgt. Es entsteht das Dreieck  $S_0SR$  mit  $S_0R$  als Drehradius und es ist  $S_0(S) = S_0R$ . Dabei liegt  $(S)$  in  $s_1$ , in welcher Linie Bild und Umlegung der durch  $S$  gehenden Falllinie der umzulegenden Ebene vereinigt sind. —  $(S)N$  oder  $(m)$  ist die Umlegung des Schenkels der Neigungswinkel in der Ebene  $xy$ . In  $(S)$  trage an  $(m)$  nach beiden Seiten hin den gegebenen Winkel  $\alpha$  an, es entstehen als Endschenkel die Linien  $(n_1)$  und  $(n_2)$ , die umgelegten Endschenkel. Zur Wiederaufrichtung dieser Linien schneide man sie mit  $h_0$  und verbinde die Schnitte mit  $S$ . So entstehen die durch  $S$  gehenden Bilder  $n_1, n_2$  der Endschenkel, welche  $z$  in  $Z_1, Z_2$  schneiden mögen. Beide Punkte  $Z_1$  und  $Z_2$  sind von  $N$  gleichweit entfernt. Endlich sind die Verbindungslinien von  $Z_1$  und von  $Z_2$  mit  $X$  und  $Y$  die zweiten und dritten Spuren  $s_2^1, s_2^2; s_3^1, s_3^2$  der gesuchten Ebenen.

**35.** Aus dem Bilde eines Kreises soll die Lage der Kreisebene gefunden werden. Man konstruiere die grosse Axe  $AB$  und die kleine Axe  $CD$  des Bildes. Ist etwa der Grundriss  $M'$  des Mittelpunktes gegeben, so ist die Kreisebene die eine oder die andere von den zwei Ebenen, die nachfolgend bestimmt werden sollen.

Durch  $M, M'$  legt man die Bildebene  $P$  ( $p_1, p_2, p_3$ ) (Fig. 58, S. 94). In  $P$  kennt man die den beiden Ebenen gemeinsame Hauptlinie  $h$ , nämlich die grosse Axe. Ihre drei Spuren bezüglich der Koordinatenebenen sind die Schnittpunkte  $H_1, H_2, H_3$  mit  $p_1, p_2, p_3$ . — Nun konstruiert man über der halben

kleinen Axe ein rechtwinkliges Dreieck  $MCC_1$ , dessen Hypotenuse gleich ist der halben grossen Axe. Sein Winkel  $\alpha$  bei  $M$  ist der Neigungswinkel der Kreisebenen zu den Bildebenen. Es ist  $CM$  das Bild einer Falllinie, welche mit ihrer pro-

Fig. 58.



jizierenden Ebene in  $P_0$  umgelegt werden soll.  $M$  gelangt nach  $(M)_0$ , wobei  $M(M)_0$  auf  $h$  von gleicher Länge mit  $ND$  abgetragen wurde. Die aus  $(M)$  unter dem Winkel  $\alpha$  zu dem Bilde  $CM$  der Falllinie gelegten Linien sind die Umlegungen der Falllinien in  $P_0$ . Die Figur enthält nur die eine,  $(M)_0 F_0$ ,

welche mit  $MC_1$  parallel ist. Sie schneidet  $CM$  in  $F_0$ , durch  $F_0$  zieht man die Hauptlinie  $h_0$  parallel mit  $h$ . Die Spuren  $H_1^0, H_2^0, H_3^0$  von  $h_0$  liegen bezüglich in den Spurlinien  $p_1^0, p_2^0, p_3^0$  der Bildebene  $P_0$ . — Verbindet man endlich die gleichnamigen Spuren von  $h$  und von  $h_0$  miteinander, so entstehen die Spuren  $s_1, s_2, s_3$  der Kreisebene. Für die zweite Lösung dürfte man  $h_0$  durch ihre symmetrische Linie in Bezug auf  $h$  ersetzen.

**36.** Von einer Kugel seien das Zentrum  $M, M'$  und der Radius  $r$  bekannt; man verzeichne das Bild des Berührungskreises des aus einem Punkte  $P, P'$  an die Kugel gelegten berührenden Kegels.

Um den für die Konstruktion nötigen Flächenraum zu beschränken, ist in Fig. 59 (S. 96) das Axensystem nach dem Mittelpunkte der Kugel verlegt worden. Es sind  $x^*, y^*, z^*$  die neuen Axenbilder,  $P'^*$  der neue Grundriss des gegebenen Punktes und es fällt  $M$  mit seinem neuen Grundrisse zusammen. Der Umriss des Kugelbildes ist der mit dem Radius  $r$  um  $M$  beschriebene Kreis. — Um bei der nun vorzunehmenden Umlegung der Linie  $MP$  in die durch  $M$  gehende Bildebene  $P_0^*$  übermässig grosse Spurendreiecke zu vermeiden, wähle man  $Q$  als Mitte zwischen  $M$  und  $P$ , sein Grundriss  $Q'^*$  liegt in der Mitte von  $MP'^*$ . (Wären die auftretenden Linien auch jetzt noch von unbequemer Länge, so wähle man  $Q$  noch näher bei  $M$ , in  $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots$  des Abstandes  $MP$ . Auch könnte man den Scheitel des Axensystems in die Mitte der Strecke  $MP$  verlegen.) Die durch  $Q$  gehende Bildebene hat die Distanz  $MD$ , welche in  $P$  rechtwinklig zu  $MP$  zweimal abgetragen wird. Es entsteht die Umlegung  $(P)$ .  $M(P)$  ist die Umlegung der Linie  $MP$  und der Umrisskreis ist zugleich die Umlegung desjenigen Grosskreises, den die projizierende Ebene von  $MP$  aus der Kugel schneidet. — Aus  $(P)$  lege man die Tangenten  $(P)(A), (P)(B)$  an den umgelegten Grosskreis; es ist  $(A)(B)$  die Umlegung des in jene projizierende Ebene fallenden Durchmessers des gesuchten Berührungskreises; seine Mitte  $(G)$  liegt in  $(P)M$ ;  $(G)(A) = (G)(B) = \varphi$  ist der Radius des verlangten Kreises. Die als  $(A), (B)$  umgelegten Punkte

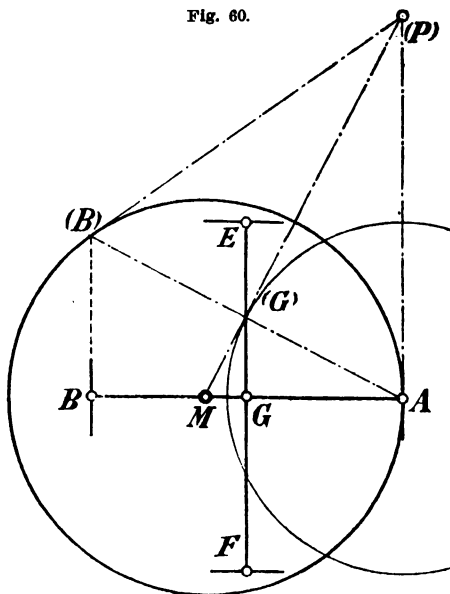




Senkrechten in  $J, K$  geschnitten; in diesen Punkten berühren sich der Umrisskreis und das Bild des Berührungskreises. (Offenbar können diese Punkte auch zusammenfallen oder imaginär sein.) — Wenn man in der Mitte ( $G$ ) von  $(AB)$  ebenfalls eine Hauptlinie  $h_1$  zieht und darauf vom Schnitt mit  $MP$  aus den Radius  $\varrho$  nach beiden Seiten abträgt, so entstehen die Scheitel  $E, F$  der grossen Axe des gesuchten Kreisbildes. — Da  $(AB)$  eine umgelegte Falllinie ist, so giebt  $\alpha$  den Winkel an, den die Ebene des Berührungskreises mit den Bildebenen einschliesst.

In Fig. 59 ist so disponiert worden, dass Umrisskreis und Berührungskreis auf der Kugel sich in zwei Punkten  $J', K'$  schneiden. In den Bildpunkten  $J, K$  berühren sich die Bilder jener Kreise. Es entsteht der Fall der doppelten Berührung einer Ellipse mit einem Kreise, wobei die Berührungspunkte symmetrisch zu der kleinen Axe der Ellipse liegen — Wäre in Fig. 59 der Punkt  $H$  ausserhalb des Umrisskreises gelegen, so wären diese Punkte  $J, K$  nicht mehr vorhanden etc. — Es können  $J, K$  im Scheitel

Fig. 60.



der kleinen Axe etwa in  $A$  zusammenfallen. Auf der Kugel berühren sich diesfalls der Berührungskreis des Kegels aus  $P$  und der Umrisskreis. Die Lage von  $(P)$ , für welche dieser Übergangsfall eintritt, ist in Fig. 60 veranschaulicht. Die Elemente  $J, K$  haben sich in  $A$  vereinigt und es bleiben von dem Bilde des Berührungskreises die grosse Axe  $EF$  von der Länge  $A(B)$

und die kleine Axe  $AB$ . Aber es haben hier Kreis und Ellipse in  $A$  vier aufeinanderfolgende Punkte gemein; jener Kreis vom Zentrum  $M$  ist der Oskulationskreis der Ellipse im Scheitel  $A$  der kleinen Axe. — Sind die Axen  $AB, EF$  gegeben, so kann man umgekehrt  $M$  finden. Anstatt ( $B$ ) wolle man hierbei ( $G$ ) benutzen: Mit dem um  $A$  mit der halben grossen Axe als Radius beschriebenen Kreise schneide man die grosse Axe und lege in den Schnittpunkten (den Brennpunkten) an den Kreis die Tangenten; sie werden sich auf der kleinen Axe im Zentrum  $M$  des Oskulationskreises schneiden. — Für die Scheitel  $E, F$  versagen die Herleitung und die Konstruktion. Bedenkt man aber, dass  $M$  der Pol der grossen Axe in Bezug auf den um  $A$  beschriebenen Kreis ist, so lässt sich eine analoge Konstruktion auch für  $E, F$  finden. Auf diese Konstruktionen wird der Verfasser an anderer Stelle näher eintreten.

## Vierter Teil.

### Die schiefe Axonometrie.

**37.** In der schiefen Axonometrie werden das räumliche Objekt und seine drei Orthogonalprojektionen (Grund-, Auf- und Seitenriss) auf den rechtwinkligen Koordinatenebenen mit einer willkürlichen Projektionsrichtung  $p^r$  auf eine Bildebene  $P$  projiziert. Es entstehen das axonometrische Bild und die drei axonometrischen Risse.

Die Schnittlinien der Koordinatenebenen sollen wieder das Axensystem  $O^r. x^r y^r z^r$  genannt werden. Ist die gegenseitige Lage des Axensystems, der Bildebene und der Projektionsrichtung festgesetzt worden, so ist wie bei der orthogonalen Axonometrie der Zusammenhang zwischen dem räumlichen Objekte und seiner ebenen Darstellung durch die axonometrischen Bilder ein umkehrbar eindeutiger. Räumliche

Konstruktionen müssen sich durch solche in der Bildebene ersetzen (darstellen) lassen. Die diesbezüglichen Konstruktionen müssen die bei der orthogonalen Axonometrie behandelten zu direkten Spezialfällen haben.

Die fundamentalen Konstruktionen, welche sich auf die Elemente in vereinigter und in paralleler Lage beziehen, unterscheiden sich keineswegs von denen bei der Darstellung in orthogonaler Axonometrie; sie werden als bekannt vorausgesetzt, insoweit es sich nicht um Spezialfälle der Darstellungsweise handelt.

Das Objekt, in fester Verbindung mit den Koordinatenebenen, lässt sich in der Projektionsrichtung parallel verschieben, ohne dass die Bilder sich ändern. An Stelle dessen darf man auch die Bildebene parallel mit sich selbst in der Projektionsrichtung verschoben denken, die Bilder in der verschobenen Bildebene geben, mit der festgewählten Projektionsrichtung auf die ursprüngliche Lage zurückprojiziert, wiederum die früheren Bilder.

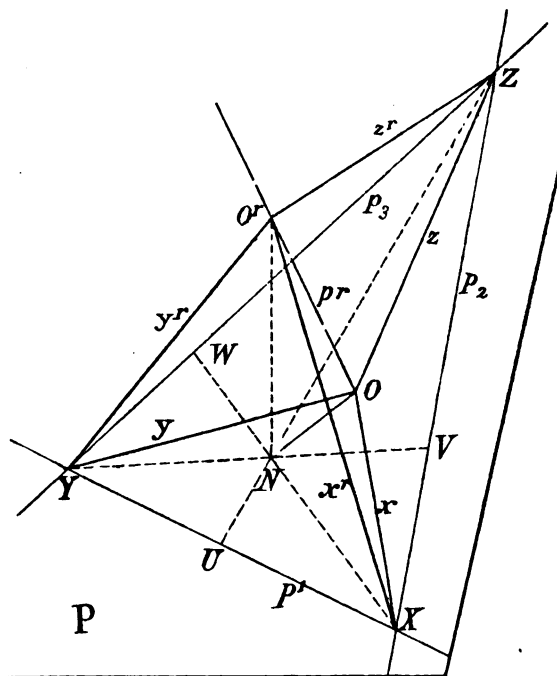
Durch die ebene Darstellung allein, nämlich durch die vier axonometrischen Bilder und das Bild des Axensystems, ist das Objekt nicht bestimmt, abgesehen von den willkürlichen Parallelverschiebungen in der Projektionsrichtung. Erst wenn gewisse Bedingungen gefordert werden, lässt sich das Objekt bestimmen. Die Anzahl der erforderlichen Bedingungen wird im zweitfolgenden Teile, für die orthogonale Axonometrie in dem nächstfolgenden, behandelt werden.

**38.** Für die schiefe Axonometrie sind einige Begriffe neu einzuführen. Die räumlichen Axen  $x^r, y^r, z^r$  schneiden die Bildebene  $P$  in den drei Ecken  $X, Y, Z$  des Spurendreiecks\* dieser Bildebene. Seine Seiten  $p_1, p_2, p_3$  sind die Spurlinien der drei Koordinatenebenen in  $P$ , bezüglich die Spuren der Bildebene in den Koordinatenebenen („Bildebenenspuren“). Der Projektionsstrahl  $p^r$  des Scheitels  $O^r$  des Axensystems schneide  $P$  in  $O$  (Fig. 61, S. 100). Darauf ist  $O.XYZ$  oder

\* Auch hier sind die Spurendreiecke stets spitzwinklig, eine Folge davon, dass das Axensystem ein orthogonales ist.

$Oxyz$  das Bild des Axensystems. Der Höhenschnitt  $N$  des Spurendreiecks ist nach wie vor die Orthogonalprojektion von  $O^r$  auf  $P$ . Das bei  $N$  rechtwinklige Dreieck  $O^rNO$  enthält

Fig. 61.



bei  $O$  den Projektionswinkel  $\varphi$ . Ferner ist  $NO$  die Fluchtlinie des Punktes  $O^r$ .

Ist  $P^r$  ein beliebiger Punkt des Raumes,  $P$  sein Bild in  $P$  bezüglich der schiefen Parallelprojektion,  $P_n$  seine Orthogonalprojektion auf  $P$ , so ist das Dreieck  $P^rP_nP$  mit  $O^rNO$  ähnlich und in paralleler Lage. Dabei ist  $P_nP$  nach Richtung und Grösse die Fluchtlinie des Punktes  $P^r$ . Alle Fluchtlinien sind parallel und der Länge nach proportional den Abständen der Raumpunkte von der Ebene  $P$ ;  $f = P^rP_n \cdot \text{ctg } \varphi$ . (Die Fluchtlinien der Raumpunkte sind die Orthogonalprojektionen ihrer projizierenden Linien auf die Bildebene.)

In der nun folgenden Behandlung der schiefen Axonometrie werden das Bild  $O.xyz$  des Axensystems und ein Spurendreieck als bekannt vorausgesetzt. Nach Fig. 61 bedeutet die Festsetzung des Spurendreiecks die Angabe der Lage des räumlichen Axensystems zu der Bildebene; durch  $XYZ$  wird  $N$  und die Distanz  $NO^r$  in bekannter Weise bestimmt. Hierauf wird  $O^rO$  die Projektionsrichtung sein. — An Stelle des Spurendreiecks könnte man auch die Richtungen von  $p_1$  und  $p_2$  wählen; hierdurch ist bei gegebenem Bilde  $O.xyz$  die Richtung  $p_3$  bestimmt. Von den Richtungen der sechs Geraden  $x, y, z; p_1, p_2, p_3$  sind fünf unabhängig, die sechste ist durch jene fünf eindeutig bestimmt. Der Zusammenhang zwischen diesen Richtungen wird stets durch irgend ein Spurendreieck vermittelt.

**39.** Die Zeichnungsfläche ist als irgend eine der unter sich parallelen Bildebenen  $P, P_1, P_2, \dots$  anzusehen. Punkte dieser Ebenen, die auf demselben Projektionsstrahle gelegen sind, projizieren sich stets als ein und derselbe Punkt. Alle Figuren solcher Ebenen projizieren sich in wahrer Grösse und Gestalt.\* Diese Ebenen sind zusammen die Bildebenen genannt worden.

Die Bildebenen schneiden das festgedachte Axensystem in ähnlichen Dreiecken, welche sich wieder als ähnliche Dreiecke in paralleler Lage projizieren. Diese projizierten Dreiecke sind perspektive Figuren mit  $O$  als Centrum und mit unendlich ferner Axe. Ihre Ecken erfüllen die Axenbilder  $x, y, z; X_1, Y_1, Z_1; \dots$  und die Seiten durch  $p_1, p_2, p_3; p_1^1, p_2^1, p_3^1; \dots$  bezeichnet werden. Für die durch  $O^r$  gelegte  $P_0$  reduziert sich das Bild des Spurendreiecks auf die drei durch den Punkt  $O$  gehenden Linien  $p_1^0, p_2^0, p_3^0$ .

Die Seiten  $p_1, p_1^0, p_1^1, \dots$  fallen mit ihren Grundrissen zusammen, weil sie in der Grundrissebene liegen. Die Grund-

---

\* Diese Eigenschaft besitzt auch die weitere Schar derjenigen Ebenen, welche zu den eben genannten mit Bezug auf die Projektionsrichtung  $p^r$  orthogonal-symmetrisch liegen.



durch das Ziehen von Parallelen und mit Benutzung der Axenbilder  $x, y, z$  weitere Spurendreiecke, z. B.  $X_1, Y_1, Z_1$  hinzu. Für das Dreieck  $XYZ$  seien  $XW, YV, ZU$  die Höhen,  $N$  der Höhenschnitt und  $ND$  die Distanz (gleich  $NO^r$ ). Letztere trage man als  $N(O)$  rechtwinklig an die Fluchtlinie  $NO$  des Punktes  $O^r$  an. Es ist alsdann  $(O)NO$  die Umlegung des früher genannten räumlichen Dreiecks  $O^rNO$  in die Ebene  $P$ . Der Winkel  $(O)ON$  ist die Umlegung des Projektionswinkels und es ist  $(O)O$ , in  $(p)$  liegend, der Abstand der beiden Ebenen  $P_0$  und  $P$ , gemessen in der Projektionsrichtung, während  $(O)N = d$  die senkrechte Entfernung beider Ebenen bedeutet.

Denkt man sich die Höhenfusspunkte  $U_1, V_1, W_1$  und den Höhenschnitt  $N_1$  für das zweite Spurendreieck konstruiert, so wird man finden, dass auch diese Punkte und  $U, V, W, N$  in der Perspektivität zwischen  $XYZ$  und  $X_1Y_1Z_1$  je entsprechende sind. Es schneidet also  $OU$  die Spur  $p_1^1$  in  $U_1$ , dort ziehe parallel zu  $UN$ , so wird  $NO$  in  $N_1$  geschnitten. In  $N_1$  ziehe man parallel mit  $N(O)$  bis  $(p)$ , so entsteht  $(O)_1$ . Dabei ist  $(O)_1N_1O$  die Umlegung des Dreiecks  $O_1^rN_1^rO$ . Endlich ist nun  $(O)_1O$  gleich der in der Projektionsrichtung gemessenen Entfernung der Ebenen  $P_0$  und  $P_1$ .

So weitergehend entsteht in  $(p)$  die mit  $Z, Z_1, Z_2, \dots$  oder mit  $U, U_1, U_2, \dots$  etc. perspektive Reihe  $(O), (O)_1, (O)_2, \dots$  ihre Punkte entsprechen in der genannten Folge den Ebenen  $P, P_1, P_2 \dots$ . Der Punkt  $O$  entspricht sich selbst, er ist der der Ebene  $P_0$  zugehörige Punkt  $(O)_0$ . Die Entfernung  $(O)_i(O)_k$  stimmt allgemein mit dem in der Projektionsrichtung gemessenen Abstände der Ebenen  $P_k, P_i$  nach Grösse und Sinn überein. Die in der Fluchtlinie  $NO$  gemessene Strecke  $N_kN_i$  soll als die Zwischenfluchtlinie  $f_{i,k}$  der Ebenen  $P_i, P_k$  bezeichnet werden. Die Differenz der Strecken  $(O)_kN_k$  und  $(O)_iN_i$  soll die Zwischendistanz  $d_{i,k}$  heissen. — Hält man neuerdings das räumliche Axensystem  $O^r.x^ry^rz^r$  fest und legt man einerseits die verschiedenen Bildebenen  $P$ , andererseits den Projektionsstrahl  $p^r$  durch  $O^r$ , so schneiden die Ebenen  $P$  den Strahl  $p^r$  in einer Punktreihe,

deren Umlegung um eine Fluchtlinie mit der Reihe der Punkte ( $O$ ) entgegengesetzt gleich ist.

Um eine Bildebene  $P$  durch einen gegebenen Punkt  $A, A'$  zu legen, verfähre man wie in Nr. 22 (Fig. 34). Man ziehe durch  $A$  die zu  $p_1^0, p_2^0, p_3^0$  parallelen Linien 1, 2, 3, durch  $A'$  bezüglich 1', 2', 3' parallel zu  $p_1^0, x, y$ , so hat man die Bilder und die Grundrisse dreier in der Ebene  $P$  liegenden Geraden.

40. Sollen auf einer Geraden Abmessungen gemacht werden, so wird dieselbe in eine der Bildebenen umgelegt, indem man ihre projizierende Ebene um das bezügliche Bild dreht, bis diese Ebene mit der Bildebene zusammenfällt. Indem man die Gerade vom Bilde  $g$  (kurz gesagt die Gerade  $g$ , deren Grundriss  $g'$  mindestens noch gegeben sein muss) mit zwei Bildebenen  $P_1, P_2$  schneidet, mögen die Punkte  $G_1, G_2$  (des Bildes) entstehen.

Der Einfachheit der Vorstellung wegen denke man  $P_1$  als mit der Zeichnungsfläche zusammenfallend. Trägt man dann in  $G_2$  nach Sinn und Grösse die nach vorangehender Nummer zu bestimmende Linie  $(O)_2(O)_1$  als  $G_2R$  ab,\* zieht ferner durch  $G_2$  eine Linie von der Richtung der Fluchtlinien und fällt aus  $R$  darauf die Senkrechte  $RG_n$ , so ist der Fusspunkt  $G_n$  die Orthogonalprojektion des Punktes  $G_2$  auf die Ebene  $P_1$  (Fig. 63, S. 105). Ferner ist  $G_1G_n$  die Orthogonalprojektion der Geraden auf die Ebene  $P_1$ . Der Punkt  $G_2$  ist um die Zwischendistanz  $d_{12}$  vertikal über (unter)  $G_n$  gelegen. Dieser Punkt wird in gewohnter Weise durch Benutzung der Falllinie  $G_2Q$  (wobei  $Q$  der Fusspunkt der aus  $G_n$  auf  $g$  gefällten Senkrechten ist) umgelegt: Man macht  $G_nS$  parallel  $g$ , gleich der Zwischendistanz  $d_{12}$ , dann trägt man  $QS = Q(G_2)$  auf der Linie  $G_nQ$  ab, denn in dieser Linie fallen Orthogonalprojektion und Umlegung der Falllinie  $G_2Q$  zusammen. — Die Linie ( $g$ ), durch  $G_1$  und ( $G_2$ ) gehend, ist nun die Umlegung

---

\* Den Ebenen  $P_1, P_2$  entsprechen nach der Bezeichnung für Fig. 62 bezüglich  $(O)_1$  und  $(O)_2$ . Hier geht man von  $P_1$  aus, denkt  $(O)_2$  nach  $G_2$  verlegt, darauf wird  $(O)_1$  nach  $R$  fallen!







[illegible]

Die Figur enthält überdies einige bemerkenswerte Stücke. Der mit  $\alpha$  bezeichnete Winkel  $P_nQS$  ist die wahre Grösse des Neigungswinkels der Ebene  $e_1, e_2$  zu den Bildebenen.  $QS$  ist die Umlegung der Falllinie vom Bilde  $QP$  in die Ebene  $P_1$  und durch Drehung um ihre diesbezügliche Orthogonalprojektion  $QP_n$ . — Zieht man  $SN_1$  senkrecht auf  $SQ$ , so ist diese Linie die Umlegung einer Normalen auf die Ebene

um ihre Normalprojektion  $N_1 P_n$ . Räumlich ist  $N_1 P_r$  diese Normale und es ist  $N_1, N_2$  ( $N_2 = P$ ) ihre Darstellung durch die Spurpunkte in  $P_1, P_2$ . Indem man alle möglichen Parallelverschiebungen von  $N_1 N_2$  ausführt, entstehen die sämtlichen Normalen der gegebenen Ebene.\*

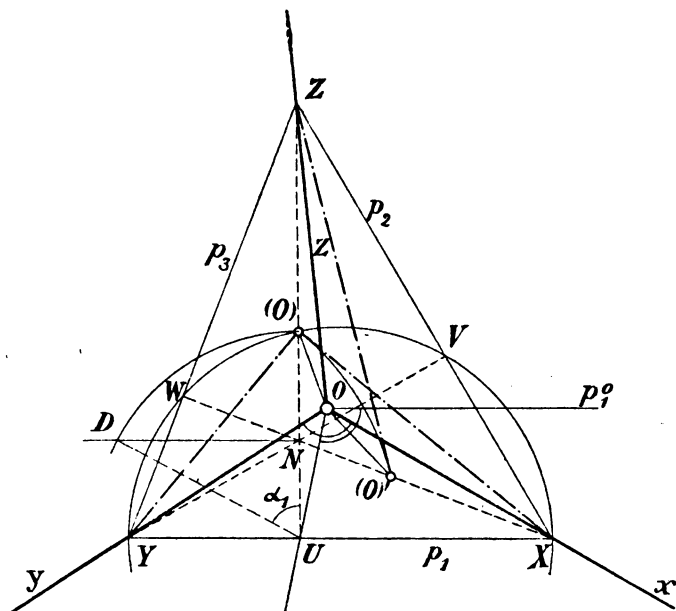
Um für die vorliegende Ebene  $e_1, e_2$  die durch den Punkt  $P$  gehende Linie  $k$  zu finden (Nr. 14), schneide man  $e_1$  mit der Mittelsenkrechten des Affinitätsstrahls  $P(P)$ , bezüglich  $P(P)'$ . Es entsteht  $K_1$  und durch  $K_1$ , ferner  $K_2 = P$  ist die Gerade  $k$  dargestellt;  $K_1 P$  ist ihr Bild und  $K_1(P)$  ihre Umlegung, beide sind augenscheinlich von gleicher Länge.

Wie in vorangehender Nummer, sollen auch hier die Spezialfälle übergangen werden. Nur die Umlegung der Koordinatenebene  $xy$  mag noch zur Darstellung gelangen, weil hierfür wieder besondere Hilfsmittel zu Gebote stehen. — Schneidet man (Fig. 66, S. 109) die Höhe  $ZU$  des Spurendreiecks mit dem Kreise  $XYVW$ , so entstehen zwei Punkte, welche als Umlegungen des Scheitels  $O^r$  anzusehen sind, wenn die Umlegung in die Ebene  $P$ , durch Drehung um  $p_1$ , ausgeführt wird. Die Figur enthält  $(O)$  als den einen dieser Punkte.\*\* Die Strecken  $(O)X$  und  $(O)Y$  sind die wahren Längen der räumlichen Axenabschnitte  $O^r X, O^r Y$  von den Bildern  $OX, OY$ . Es sind damit die Massstäbe (Nr. 19) zweier Axen gefunden. — Beschreibt man um  $U$  einen durch  $(O)$  gehenden Kreis, so schneidet er die in  $N$  zu  $p_1$  gezogene Parallele in  $D$ , wobei  $ND$  die Distanz der Ebene  $P$  ist. Der mit  $\alpha_1$  bezeichnete Winkel  $DUN$  ist der Neigungswinkel der Grundrissebene mit den Bildebenen. — Dreht man  $Y(O)$  um  $Y$ , bis  $(O)$  nach  $(O)'$  in  $XW$  gelangt, so ist  $(O)'Z$  die wahre Länge

\* Man wird leicht bemerken, dass die Bilder der Normalen und der Falllinien dieselben Träger haben, wenn Projektionsrichtung und Spur sich rechtwinklig kreuzen, und umgekehrt.

\*\* In Nr. 16 sind sie  $U_1, U_2$  genannt worden. — Für die Grundrissebene sind  $x, y; OU, p_1^0$  die Bilder zweier Rechtwinkelpaare. Schneidet man sie mit  $p_1$  und beschreibt man über den entstehenden Abschnitten als Durchmesser Kreise, so schneiden sich diese in den  $O$  bezüglich  $g = p_1$  zugeordneten Punkten, den Umlegungen von  $O^r$ , Nr. 10, 14.

**Fig. 66.**

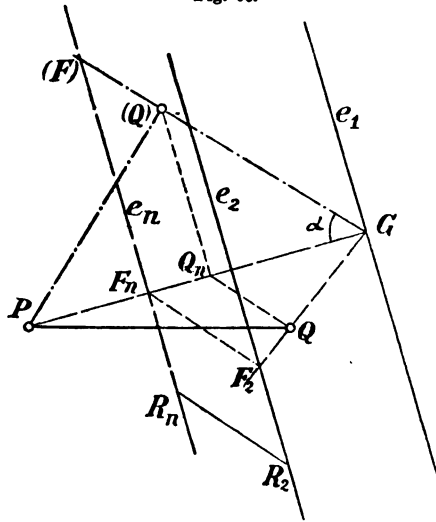


**42.** In der vorangehenden Nummer ist die Aufgabe mitgelöst worden, Normalen zu einer gegebenen Ebene darzustellen. Jene Auflösung ist ohne weiteres umkehrbar; dieselbe Figur giebt die auf der gegeben gedachten Geraden



$R_2$  auf  $e_2$  trage man nach Richtung und Grösse die Zwischenfluchtlinie ( $N_2 N_1$  in Fig. 62) als  $R_2 R_n$  ab. Die durch  $R_n$  zu  $e_1$  gezogene Parallele  $e_n$  ist die Normalprojektion von  $e_2^r$  auf  $P_1$ . Nun ziehe man  $PG$  senkrecht auf  $e_1$ , schneide  $e_n$  in  $F_n$  der Normalprojektion des Punktes  $F_2^r$  vom Bilde  $F_2$ . In  $F_n$  trägt man auf  $e_n$  die Zwischendistanz  $d_{12}$  als  $F_n(F)$  ab, zieht  $(F)G$ , die Umlegung der durch  $G$  gehenden Falllinie der Ebene. Die Senkrechte  $P(Q)$  aus  $P$  auf  $(F)G$  ist die wahre Länge des gesuchten Abstandes. Es ist nun  $(Q)$  die Umlegung eines Punktes der Falllinie, dessen Normalprojektion in  $Q_n$  liegt, die schiefe Projektion aber in  $Q$ , wobei  $Q_n Q$  parallel mit den Fluchtlinien zu ziehen ist. Das axonometrische Bild des Abstandes endlich ist  $PQ$ .

Fig. 68.



Hat man wieder Geraden und Ebenen in senkrechter Lage darzustellen, was als Detailkonstruktion häufig vorkommt, so bietet sich ein weiteres Hilfsmittel dar. Man bediene sich nämlich der Bilder von Rechtwinkelpaaren der Koordinatenebenen. Für jede dieser drei Ebenen kennt man nämlich die Bilder zweier Rechtwinkelpaare, die beiden Axen als das eine, sowie Haupt- und Falllinie ( $p_1, OU$ ;  $p_2, OV$ ;  $p_3, OW$ , Fig. 62) als das andere. Man verfügt somit über alle Bilder von Rechtwinkelpaaren der Koordinatenebenen. Befinden sich nun eine Gerade  $g^r$  und eine Ebene  $E^r$  ( $s_1^r, s_2^r, s_3^r$ ) in senkrechter Lage, so sind bezüglich in  $xy, xz, yz$  die Projektionen und Spuren  $g', s_1; g'', s_2; g''', s_3$  Paare gegenüberliegender Linien. Die Benutzung zweier derselben ist ausreichend. Obgleich die Ausführung





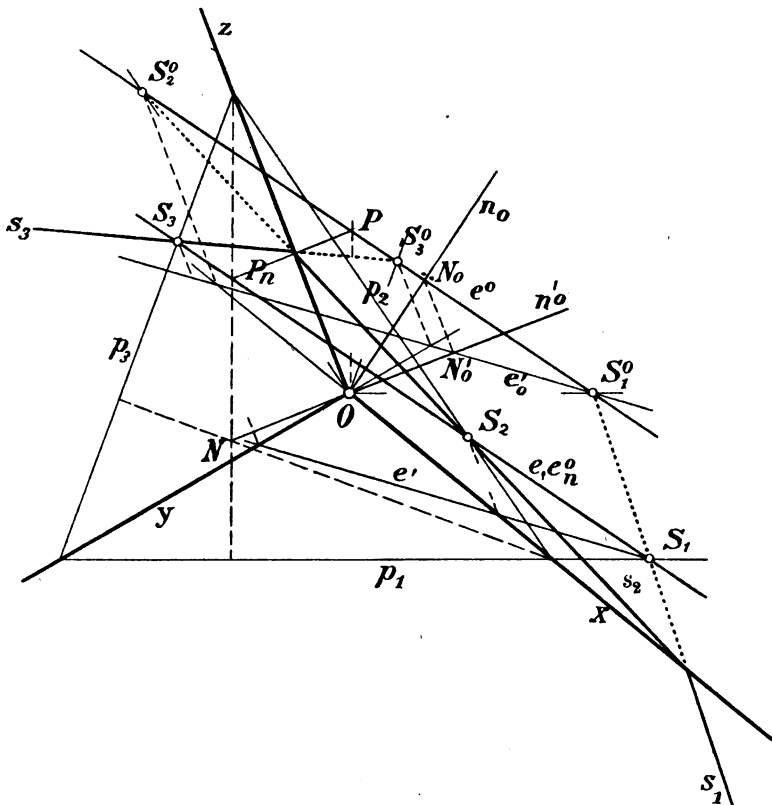
schneide  $s_2$  mit  $OV$ , ziehe parallel  $x$ , darauf schneide  $s_2$  mit  $z$  und ziehe parallel  $p_2$ ; den entstehenden Schnittpunkt verbinde mit  $O$  und habe  $n''$ . — In  $yz$  schneide  $s_3$  mit  $OW$ , ziehe parallel  $z$ ; schneide  $s_3$  mit  $y$ , ziehe parallel  $p_3$ ; schneide diese Linien, verbinde mit  $O$  und habe  $n'''$ . — Damit sind die drei Risse der Normalen gefunden. Schneidet man  $n'$  mit  $s_1$ ,  $n''$  mit  $s_2$ ,  $n'''$  mit  $s_3$  und verbindet man diese Punkte bezüglich mit  $S_x, S_y, S_z$ , so schneiden sich diese drei Geraden im Fusspunkte  $F$  der Senkrechten. Endlich sind in Fig.  $F', F'', F'''$  die drei Risse dieses Fusspunktes.

43. Ein für die schiefe Axonometrie charakteristisches Beispiel bietet eine zu den Bildebenen senkrechte Ebene  $E^r$ . Sie ist durch ihre Spur (Hauptlinie)  $e$  in  $P$  ( $p_1, p_2, p_3$ ) bestimmt (Fig. 70, S. 114). — Diese Ebene  $P$  denke man sich als die Zeichnungsfläche. — Neben  $P$  führe man etwa  $P_0$  ein, welche jene Tafelnormalebene in  $e^0$  schneiden soll. Für die Bestimmung des Bildes  $e^0$  weiss man, dass die Orthogonalprojektion  $e_n^0$  von  $e^0$  auf  $P$  mit  $e$  zusammenfällt. Um  $e^0$  zu erhalten, trage man von irgend einem Punkte  $P_n$  von  $e_n^0$  die Strecke  $P_n P$  gleich und parallel  $NO$  (der Zwischenfluchtlinie) ab. Darauf ist  $e^0$  durch  $P$  parallel mit  $e$  zu ziehen. — Nun sind die Schnitte von  $e$  mit  $p_1, p_2, p_3$  die Spurenbilder  $S_1, S_2, S_3$  von  $e$ . Ebenso wird  $e^0$  von  $p_1^0, p_2^0, p_3^0$  bezüglich in den Spurenbildern  $S_1^0, S_2^0, S_3^0$  geschnitten. (In Fig. sind diese Parallelen  $p_1^0, \dots$  aus  $O$  zu  $p_1, \dots$  unterdrückt worden.) Verbindet man die gleichnamigen Spuren von  $e$  und  $e^0$ , so entstehen die Spuren  $s_1, s_2, s_3$  der Tafelnormalebene  $e, e_0$ . — Indem man ferner aus  $S_3^0$  auf  $y$  und aus  $S_2^0$  auf  $x$  „herablotet“ (nämlich Parallelen zu  $z$  zieht, damit  $y, x$  schneidet) und die Fusspunkte verbindet, entsteht die durch  $S_1^0$  gehende Horizontalprojektion  $e'_0$  von  $e_0$  ( $e^0$ ). — Die Senkrechte aus  $O^r$  auf  $E^r$  gefällt hat zum Bilde die aus  $O$  auf  $e^0$  direkt gezogene Senkrechte  $n_0$ . Mit Hilfe von  $N_0$  in  $e_0$ ,  $N'_0$  in  $e'_0$  findet man den axonometrischen Grundriss  $n'_0$  des Lotes. Die Figur enthält ebenso den Grundriss  $e'$ . — Würde man eine andere Bildebene zu Grunde legen, in welcher  $e$  liegen soll, so würde man an

Stelle von  $E$  ( $s_1, s_2, s_3$ ) eine parallele Verschiebung dieser Ebene finden.

Die Gerade  $P_n P$  (gleich und parallel mit  $NO$ ) stellt, mit  $P_n$  als  $G$  (in  $P$  gedacht) und mit  $P$  als  $G^0$  (in  $P_0$  liegend)

Fig. 70.

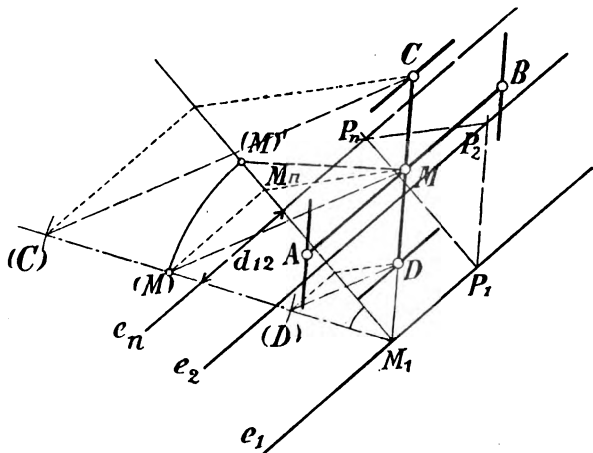


eine zu der Tafel normale Gerade dar, nämlich durch ihre Schnittpunkte  $G, G^0$  mit  $P, P_0$ .

44. Mit den hier zu Gebote stehenden Hilfsmitteln soll nun die Kreisprojektion behandelt werden. Man verzeichne die Bilder  $e_1, e_2$  der Schnittlinien der Kreisebene  $E$  mit zwei Bildebenen  $P_1, P_2$ . Es sei  $M$  (Fig. 71, S. 115) das Bild des Mittelpunktes und  $r$  der Radius. Auch hier denke man sich  $P_1$  als

die Zeichnungsfläche und konstruiere die Orthogonalprojektion  $e_n$  von  $e_2$  auf die Ebene  $P_1$ . Zu diesem Zwecke wird aus  $P_2$  auf  $e_2$  die Strecke  $P_2P_n$  gleich und parallel der Zwischenfluchtlinie  $f_{12}$  abgetragen und  $e_n$  durch  $P_n$  parallel  $e_1, e_2$  gezogen. Ist  $P_1$  der Fusspunkt des aus  $P_n$  auf  $e_1$  gefällten Perpendikels, so ist  $P_1P_2$  das Bild einer Falllinie der Ebene,  $P_1P_n$  deren Orthogonalprojektion auf  $P_1$ . Durch  $M$  ziehe ebenso, mit  $P_1P_2$  parallel, das Bild  $MM_1$  der bezüglichen

Fig. 71.



Falllinie und verzeichne den  $M$  entsprechenden Normalenfusspunkt  $M_n$ . (Die Systeme  $P_2, M, \dots$  und  $P_n, M_n, \dots$  sind centrisch-affin mit  $e_1$  als Axe.) Hierauf wird die Falllinie des Punktes  $M$  mit ihrer Normalebene zu  $P_1$  (von der Spur  $M_1M_n$ ) in  $P_1$  umgelegt, was nach Fig. durch Abtragen von  $d_{12}$  geschieht. Auf der Umlegung trägt man von  $(M)$  aus den Radius  $r$  nach beiden Seiten ab, es entstehen  $(C), (D)$ . Zu letzteren Punkten findet man die Bilder  $C, D$  auf dem Bilde der Falllinie. Wie leicht durch Proportionalität zu beweisen ist, sind hierbei  $(M)M, (C)C, (D)D$  parallel. Zu dem so gefundenen Durchmesser  $CD$  des Kreisbildes ist der in der Hauptlinie liegende,  $AB$ , konjugiert. Letzterer projiziert sich in wahrer Grösse:  $MA = MB = r$ . — Durch diese konju-

gierten Durchmesser ist das Kreisbild leicht vollständig zu zeichnen (Nr. 6, 11, 12).

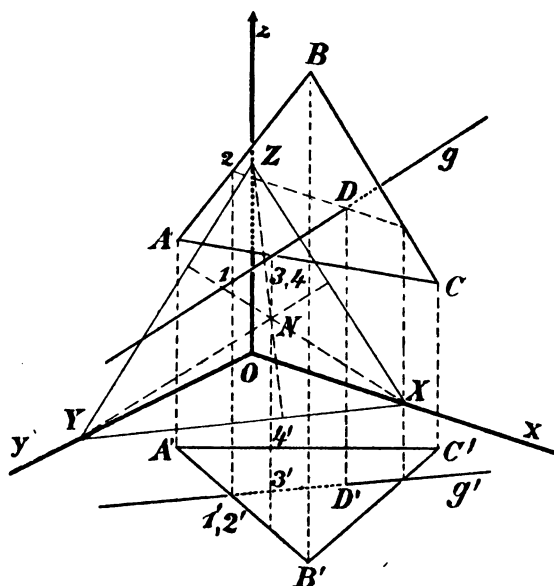
Macht man in  $M_1 M_n$  die Strecke  $M_1(M)'$  gleich lang mit  $M_1(M)$ , so ist  $(M)'$  die Umlegung des Kreiscentrums in  $P_1$ , veranlasst durch Drehung der Ebene  $E^r$  um  $e_1$ . Die Umlegung des Kreises ist hierbei der um  $(M)'$  vom Radius  $r$  beschriebene Kreis. Dieser Kreis und das Kreisbild sind entsprechende Figuren in der centrischen Affinität mit der Axe  $e_1$  mit  $(M)'$ ,  $M$  als entsprechendem Punktepaar. Um beispielsweise die Axen des Kreisbildes zu finden, lege man durch  $M$ ,  $(M)'$  einen Kreis, dessen Centrum in  $e_1$  liegt. Seine Schnittpunkte mit  $e_1$  werden mit  $(M)'$  verbunden. Die in diese Linien fallenden Durchmesser des Kreises haben die Axen des Bildes zu ihren entsprechenden Linien. Die an den Kreis parallel mit  $(M)'M$  gelegten Tangenten berühren das Kreisbild u. s. f.

Die umgekehrte Aufgabe, die Lage der Kreisebene zu finden, wenn das Kreisbild bekannt ist, lässt sich in folgender Weise lösen. Zwei konjugierte Durchmesser des Bildes seien  $A, B; C, D$ . Durch ihre Endpunkte lege man projizierende Linien und schneide eine zu diesen normale Ebene  $N$  in  $A', B'; C', D'$ . Hierauf konstruiert man die Axen der in  $N$  liegenden Ellipse, welche  $A', B'; C', D'$  zu konjugierten Durchmessern hat. Sind der Länge nach  $m$  die halbe grosse und  $n$  die halbe kleine Axe, so lege man durch die grosse Axe zwei Ebenen, welche zu  $N$  unter den Winkeln  $\arccos\left(\frac{n}{m}\right)$  geneigt sind. Die eine wie die andere dieser Ebenen giebt die Lage der Kreisebene an.

45. Um die Unterscheidung der Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit einzelner Teile der Figuren (worauf bisher keine Rücksicht genommen wurde) durchführen zu können, hat man sich an den Grundsatz zu halten: Wenn die Bilder zweier Punkte sich decken, so ist derjenige von ihnen sichtbar, welcher dem Auge näher liegt, der andere ist durch ihn verdeckt.

Diese Unterscheidung soll an einem Beispiele mit Fig. 72 vollständig durchgeführt werden. — Für eine Darstellung in orthogonaler Axonometrie ist genau derselbe Weg einzuschlagen. — Die Figur enthält die Axenprojektionen  $x, y, z$ ; ein Spurendreieck  $XYZ$ ; eine Gerade  $g, g'$ , welche das Dreieck  $ABC, A'B'C'$  in  $D, D'$  schneidet. (Zur Bestimmung von  $D$

Fig. 72.



hat man  $g$  mit der Geraden in  $ABC$ , deren Grundriss in  $g'$  fällt, geschnitten.) — Von  $D'$  aus ist  $g'$  nach der einen Seite hin sichtbar, nach der anderen unsichtbar. Für diesen Grundriss ist das Auge als unendlich ferner Punkt der  $Z$ -Axe zu betrachten und man hat nur anzugeben, in welchem Sinne die  $Z$ -Axe zu durchlaufen ist, um das Auge zu erreichen. In Fig. ist dies durch Eintragung eines Pfeiles geschehen. In  $1', 2'$  decken sich die Grundrisse zweier Punkte, deren Bilder 1 auf  $g$  und 2 auf  $AB$  liegen. Offenbar ist der letztere Punkt der dem Auge näher gelegene und somit wird bei  $1', 2'$  die Gerade  $g'$  durch  $A'B'$  verdeckt. Darauf ist  $g'$  von  $1', 2'$

bis  $D'$  unsichtbar u. s. f. — In derselben Weise hat man Auf- und Seitenriss zu beurteilen und es werden die ausgezeichneten Halbaxen unabhängig voneinander gewählt.

Es bleibt noch zu entscheiden, ob bezüglich des axonometrischen Bildes  $g$  rechts oder links von  $D$  aus sichtbar ist. Hierbei hat man einen der scheinbaren Schnittpunkte von  $g$  mit  $AC$  oder  $BC$  zu untersuchen. In dem ersteren decken sich der Punkt 3 von  $g$  mit 4 von  $AC$ ; ihre Grundrisse sind  $3'$  auf  $g'$  und  $4'$  auf  $A'C'$ . Das Auge befindet sich unendlich hoch, in der Richtung  $p^r$  oder  $OO^r$  über der Zeichnungsfläche. Ob nun aber 3 oder 4 diesem Auge näher liege, kommt auf die Lage der Axen  $x^r, y^r, z^r$  an.

Das Spurendreieck  $XYZ$  hat einen bestimmten Höhenpunkt  $N$  und eine Distanz  $ND = NO^r$ , wobei  $O^r$  um diese Distanz vertikal über oder unter  $N$  gelegen sein muss. Darauf sind  $O^rX = x^r, \dots$  die räumlichen Axen. Von diesen beiden Punkten  $O^r$  hat man den einen oder den anderen als den Scheitel des räumlichen Axensystems zu wählen. Indem man den unter der Ebene  $XYZ$  liegenden wählt, erhält Fig. 72 die Bilder der Halbaxen  $x^r, y^r, z^r$ , die von dem Scheitel aus nach oben, also nach dem Auge hin, auseinandergehen. (Nebenbei gesagt wäre hier der Punkt  $O^r$  durch die Ebene  $XYZ$  verdeckt.) Von jenen Punkten  $3^r, 4^r$ , deren Bilder sich decken, ist nun offenbar  $3^r$  dem Auge näher,  $4^r$  also verdeckt. (Von den durch diese Punkte  $3^r, 4^r$  gelegten Bildebenen  $P_3, P_4$  liegt die erstere dem Auge näher wie die letztere.) Und bei 3, 4 ist die Seite  $AC$  durch die Gerade  $g$  verdeckt. Darauf bleibt  $g$  bis  $D$  sichtbar u. s. f.

Hätte man sich vorhin für den anderen Punkt  $O^r$  entschieden, so würde bezüglich 3, 4 die Entscheidung das entgegengesetzte Resultat liefern und man hätte für  $ABC, g, D$  die sichtbaren und die unsichtbaren Elemente (abgesehen von den Umrissen) miteinander zu vertauschen. Jedes axonometrische Bild gestattet eine doppelte Auffassung, wobei, abgesehen von den Umrissen, die sichtbaren und die unsichtbaren Teile miteinander vertauscht werden (vergl. Nr. 47).

Als nicht verbindliche Regel für axonometrische Darstellungen, bei denen Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit für das Bild unterschieden werden soll, mag folgende aufgestellt werden. Man hebe, wie in Fig. 72, die nach dem Auge (nach oben) hin auseinandergehenden Halbaxen durch stärkere Zeichnung hervor.

— Wenn man mit Hilfe der Reduktionsmassstäbe der drei Axen, bei bekannten Axenbildern das axonometrische Bild eines auf die räumlichen Koordinatenebenen bezogenen Gegenstandes zeichnen will, so kann man jede der positiven räumlichen Koordinatenaxen auf jede der beiden gleichbenannten Halbaxen des Bildes beziehen. Es entstehen dann 8 verschiedene Bilder und jedes derselben gestattet die genannte doppelte Auffassung. Im ganzen würden so 16 verschiedene Bilder entstehen.

46. Die sämtlichen Spezialfälle der schief-axonometrischen Darstellung lassen sich dadurch gewinnen, dass man das Spurendreieck  $XYZ$  und die Lage des Punktes  $O$  zu diesem Dreiecke in besonderer Weise wählt. Es sollen hier die hauptsächlichsten dieser Spezialfälle soweit behandelt werden, dass die Konstruktionen dieses Abschnittes auf sie angewendet werden können.

Erster Spezialfall. Für ein beliebiges Spurendreieck liege der Punkt  $O$  in der Seite  $p_1$  dieses Dreiecks; es sei somit die Projektionsrichtung  $p'$  der Koordinatenebene  $x'y'$  parallel. Die Axenbilder  $x, y$  fallen in  $p_1, z$  nach  $OZ$  (Fig. 73, S. 120). Die verschiedenen Spurendreiecke der Bildebenen werden mit Hilfe der Seiten  $p_2, p_3$ , die sich auf  $z$  schneiden, verzeichnet. Die Bestimmung ihrer Zwischenfluchtlinien und Zwischendistanzen bietet keinerlei Schwierigkeit.

Für die Darstellung des Punktes ist zu beachten, dass  $P, P'', P'''$  in einer Parallelen zu  $x = y = p_1$  liegen, wobei nach Sinn und Grösse  $P''P = P_z P'''$  ist, wobei  $P_z$  den Durchschnitt jener Parallelen mit  $z$  bedeutet. Die Figur enthält die Bestimmung der Bildebene  $P_1$  durch den Punkt  $P$ , wobei eine zu  $p_2$  parallele Hilfslinie  $m$  benutzt worden ist; dabei sind  $m, m''$  parallel  $p_2, m'''$  parallel  $z$ . — Die Grundrisse wird



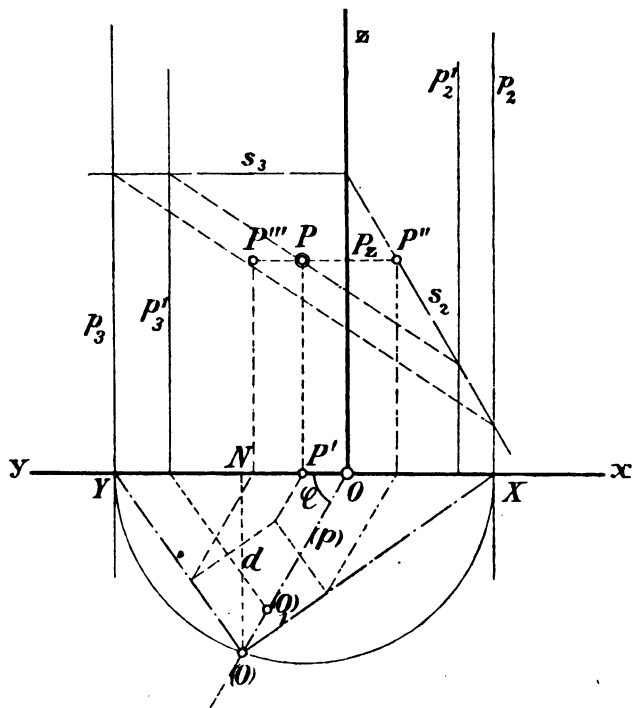




Bedient man sich eines dieser koordinierten Spurendreiecke, so treten die Konstruktionen des allgemeinen Falles auf.)

Dritter Spezialfall. Die Ecke  $Z$  des Spurendreiecks liege unendlich fern und zugleich der Punkt  $O$  in der Seite  $XY$  oder  $p_1$ . Wie im vorigen Falle (und in Nr. 28) wird die Lage des Scheitels  $O'$  durch den Punkt  $N$  in  $p_1$  bestimmt,

Fig. 75.

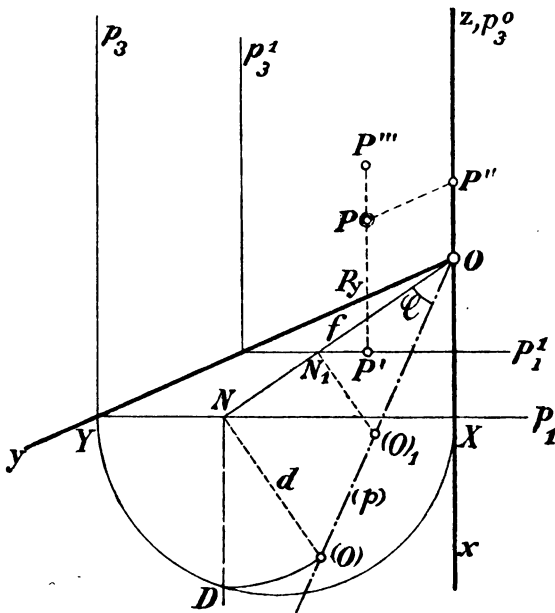


welcher auf jeden Fall zwischen  $X$  und  $Y$  liegen muss. Die Umlegung der Grundrissebene liefert dann sofort  $(O)$ , die Distanz  $d$ , den Projektionswinkel  $\varphi$  u. s. f. (Fig. 75).

Die Umlegung der zweiten und dritten Koordinatenebene geschieht wie bei dem zweiten Spezialfalle. Hierbei kann namentlich einer der Punkte  $(O')$  — aus Fig. 74 auf Fig. 75 übertragen gedacht — nach  $O$  fallen. Für eine solche Koordinatenebene sind das Originalsystem und das Bildsystem

(Das koordinierte Spurendreieck  $X^* Y^* Z^*$  (Nr. 60) zeigt das nämliche Verhalten wie  $XYZ$ .)

**Fig. 76.**



Digitized by Google





ihn gehenden Ebene  $P_1$  verzeichnet, wobei  $p_3^1$  durch  $P'''$  zu ziehen ist ( $p_1^1$  fällt in  $p_1$  und  $p_2^1$  liegt unendlich fern).

Eine Ebene  $E^r$  wird durch die zweite und dritte Spur  $s_2$  und  $s_3$ , die sich auf  $s$  schneiden, dargestellt. In Fig. sind ihre Schnitte  $e, e_1, e_0 = s_2$  mit  $P, P_1, P_0$  eingetragen. (Auch beim vorangehenden Spezialfalle stimmt die Koordinatenebene  $x^r z^r$  mit der Bildebene  $P_0$  überein.)

Die Gerade  $g^r$  ist in Fig. durch  $g, g'', g''', S_2, S_3$  dargestellt.  $g'$  liegt in  $x = y$ , ebenso  $S_1$  (letzteres zugleich auf  $g$ ). Die Schnittpunkte der Geraden mit den Ebenen  $P, P_1, P_0$  haben in gewohnter Bezeichnung die Bilder  $G, G_1, G_0 = S_2$ , die Seitenrisse dieser Spuren in den Bildebenen liegen allemal in den zugehörigen Bildebenenspur  $p_3$ .

Bezüglich der Koordinatenebenen vergleiche man den 5. Spezialfall.

(Der Übergang zu dem koordinierten Spurendreiecke  $X^*Y^*Z^*$  führt diesen in den dritten Spezialfall über.)

## Fünfter Teil.

### Der Zusammenhang zwischen Objekt, Projektionsrichtung und Bild bei der Orthogonalprojektion.

47. Um ein Objekt des Raumes, bezüglich den Raum selbst, orthogonal zu projizieren, wird man die Lage der projizierenden Linien zu dem Objekte festsetzen. Somit hat man über zwei Bedingungen zu verfügen: es hängt eine Orthogonalprojektion von zwei wesentlichen Bedingungen ab. Durch die Wahl der Richtung der projizierenden Linien nämlich ist die Stellung der Bildebene mitbestimmt; Parallelverschiebung der letzteren ändert das Bild nicht. — Das

„Auge“ befindet sich auf den projizierenden Linien in unendlicher Ferne, die Sehstrahlen sind übereinstimmend parallel; den in einen Projektionsstrahl  $p'$  fallenden Sehstrahl kann man nach der einen oder nach der entgegengesetzten Seite hin gerichtet annehmen. In beiden Fällen geschieht die Abbildung genau in derselben Weise, indem aus jedem Punkte des Objektes derselbe Bildpunkt entsteht. Aber es wird das Objekt in den beiden Fällen von entgegengesetzter Seite aus betrachtet, wodurch die sichtbare und unsichtbare Oberflächenhälfte mit einander vertauscht werden. Jede Orthogonalprojektion gestattet daher diese doppelte Auffassung des Bildes. Abgesehen von den Umrissen werden bei der einen, im Gegensatze zu der anderen, die sichtbaren und die unsichtbaren Oberflächenteile miteinander vertauscht.

Würde man in der festgedachten Bildebene  $P$  die Bilder der Objekte nicht nur gestaltlich, sondern auch bezüglich ihrer Lage innerhalb  $P$  unterscheiden wollen, so würde man finden, dass eine Orthogonalprojektion von fünf Bedingungen abhängig ist. Zu den zwei bereits genannten Bedingungen, die sich auf die Lage der Projektionsrichtung zu dem Objekte beziehen, würden die drei weiteren hinzutreten, von denen die Lage des Bildes in der Ebene  $P$  abhängt.

In allen folgenden Fällen soll nun die Lage des Bildes in der Ebene  $P$  gleichgültig sein, ebenso auch die Lage des Objektes im Raume. — Das Objekt sei durch  $o$  Bedingungen (unabhängige Bestimmungsstücke) bestimmt. Dann hat man für die Wahl des Objektes und die Stellung der Projektionsrichtung zu demselben zusammen über  $o + 2$  Bedingungen zu verfügen. Weiter sei das Bild eine solche ebene Figur, die durch  $b$  Bedingungen bestimmt wird. — Ist das Bild eines vorgestellten Objektes gegeben, so hat man bereits über  $b$  Bedingungen verfügt, und man wird für das Objekt und die Stellung der Projektionsrichtung zu demselben zusammen noch über  $x = o + 2 - b$  Bedingungen verfügen dürfen. Darauf müssen das Objekt und die Abbildung, welche das gegebene Bild liefert, bestimmt

sein; es muss im allgemeinen eine endliche Zahl von Lösungen möglich sein. -

Anstatt von der Lage der Projektionsrichtung zu dem Objekte zu sprechen, kann man als damit wesentlich gleichbedeutend darunter die Stellung des Objektes zu dem Bilde verstehen, wobei beliebige Parallelverschiebung in zu der Bildebene normaler Richtung gestattet ist.

Die hier aufgestellte Formel  $x = o + 2 - b$  soll nun an einigen Beispielen näher erläutert werden. Darauf wird, ebenfalls in dieser Nummer, auf einige Ausnahmefälle hingewiesen, in denen die Formel nicht mehr besteht. Die folgenden Nummern enthalten ausgeführte Anwendungen.

a) Ein ebenes Polygon von  $n$  Ecken und Seiten, im übrigen von allgemeiner Form, als Objekt, wird durch  $o = 2n - 3$  Stücke (Bedingungen) bestimmt. Für sein Bild ist gleicherweise  $b = 2n - 3$ . Es folgt somit  $x = 2$ .

Wenn man das Bild eines Polygons kennt, so darf man dem Original zwei Bedingungen auferlegen, darauf sind das Original und die Lage der Projektionsrichtung zu demselben bestimmt. Mit der Lage der Projektionsrichtung in Bezug auf das Original ist nun auch die Stellung des Originals zu dem Bilde bestimmt. Hierbei sind die Richtung der Spur in der Ebene des Bildes und der Neigungswinkel der Originalebene zu der Bildebene massgebend.

Anstatt dem Original zwei Bedingungen aufzuerlegen, kann man auch die Lage der Originalebene zu dem Bilde beliebig wählen. Dadurch ist das Original eindeutig bestimmt, denn es entsteht dadurch, dass man die Originalebene mit den durch die Bildpunkte gezogenen projizierenden Strahlen schneidet.

Eine dritte Möglichkeit wäre, die beiden Bedingungen auf das Original und die Stellung der Originalebene zu dem Bilde zu verteilen, etwa in der Weise, dass man die wahre Grösse eines Stückes (Strecke, Winkel) des Originals und den Neigungswinkel beider Ebenen oder die Richtung der Spur der Originalebene angiebt.



b) Ist das Objekt eine  $n$  seitige körperliche Ecke, so besteht das Bild aus  $n$  Strahlen aus einem Punkt. Man wird finden  $o = 2n - 3$ ;  $b = n - 1$ , die Winkel, welche einer jener  $n$  Strahlen in  $P$  mit den  $n - 1$  übrigen bildet, bestimmen das Bild. Es folgt  $x = n$ . Die naheliegendste Verfügung über diese  $n$  Bedingungen besteht darin, dass man die  $n$  Winkel, welche die Projektionsrichtung mit den  $n$  Strahlen der Original-ecke bilden soll, einzeln angiebt. Hierdurch ist in der That das Objekt (mehrdeutig) bestimmt.

c) Für ein beliebiges Trieder ist  $o = 3$ ,  $b = 2$ ;  $x = 3$ . Bei gegebenem Bilde hat man drei verfügbare Bedingungen. Man kann also ein gegebenes Trieder stets so orthogonal projizieren, dass ein gegebenes Bild entsteht.

Sind die Kanten  $a^r$ ,  $b^r$ ,  $c^r$  des Trieders paarweis zu einander senkrecht, so hat man  $o = 0$ ,  $b = 2$ ;  $x = 0$ . Das „Axensystem“, wie das Trieder jetzt heissen soll, hat kein Bestimmungsstück. Da  $x = 0$ , so folgt, dass durch das Bild allein das Original und dessen Stellung zu dem Bilde bestimmt sind. — Die folgende Abzählungsweise führt zu demselben Resultate. Drei durch einen Punkt gehende, in  $P$  liegende Geraden seien das Bild eines Trieders. Dann ist nach oben  $x = 3$ . Über diese drei Bedingungen kann man so verfügen, dass man die drei Seiten (Kantenwinkel) des Objektes sämtlich gleich  $90^\circ$  annimmt. Dann muss die Lage des Axensystems zu dem Bilde bestimmt sein.

Sind nur zwei Kantenwinkel, etwa  $a^r b^r$  und  $a^r c^r$ , rechte, so hat das Trieder ein Bestimmungsstück, nämlich den Kantenwinkel  $b^r c^r$ . Es folgt somit  $o = 1$ ,  $b = 2$ ;  $x = 1$ . Kennt man das Bild, so hat man für das Original und die Lage der Projektionsrichtung zu dem Originale zusammen über eine Bedingung zu verfügen. Angenommen, es sei die wahre Grösse des Winkels  $b^r c^r$  oder  $\alpha^r$  bekannt, so wird das Original nach Fig. 79 (S. 130) konstruiert. Man zieht die Spur  $s^{(b^c)}$  senkrecht zu  $a$ , etwa durch  $T$  auf  $a$  gehend, schneidet die Bilder  $b$ ,  $c$  in  $S^b$ ,  $S^c$ . Durch letztere Spuren legt man einen Kreis, dessen Punkte, mit jenen verbunden, Verbindungslinien liefern, die sich unter dem  $\alpha^r$  gleichen Winkel ( $\alpha$ ) schneiden. Wird  $a$



Teilverhältnisse. Bei gegebenem Bilde kann man höchstens über die gegenseitige Lage (den Abstand) zweier Originalgeraden verfügen, so sind die übrigen Strahlen bestimmt.\* Die zweite Bedingung oder beide Bedingungen beziehen sich auf die Lage der Originalebene zu der Bildebene.

Schliesslich bestehe das Objekt aus zwei Geraden  $a^r, b^r$  durch den Scheitel  $P^r$ . Es seien  $a, b, P$  die bezüglichen Bilder. Ist  $\varphi^r$  der von  $a^r$  mit  $b^r$  eingeschlossene Winkel,  $\varphi$  sein Bild und sind  $a^r, b^r$  zu  $a, b$  (oder zu  $P$ ) unter den Winkeln  $\alpha, \beta$  geneigt, so sind von den vier Stücken  $\varphi^r, \alpha, \beta, \varphi$  je drei unabhängig. Es kommen nämlich  $\varphi^r, 90 - \alpha, 90 - \beta$  als Kantenwinkel und  $\varphi$  als der  $\varphi^r$  gegenüberliegende Flächenwinkel einer körperlichen Ecke vom Scheitel  $P^r$  vor. Es kommt die Angabe von  $\varphi^r$  oder  $\varphi$  je einer Bedingung gleich. Die Angabe der Grösse eines Winkels des Originals oder des Bildes ist eine einfache Bedingung. (Anderseits hat man für diesen Winkel  $\alpha = b = 1, x = 2$ ; ist das Bild bekannt, so kann man bezüglich des Winkels und die Lage seiner Ebene zu dem Bilde über zwei Bedingungen verfügen.) — Wenn  $\varphi^r = 90^\circ$ , so darf  $\alpha = 0, b = 1; x = 1$  gesetzt werden. Die Angabe der gegenüberliegenden einer gegebenen Richtung des Bildes zählt für eine Bedingung. Ist das Bild eines rechten Winkels gegeben, so wird die Lage des letzteren zu seinem Bilde von einer weiteren Bedingung abhängig sein. Sie ist z. B. bestimmt, wenn man die Neigung des einen Schenkels zu der Bildebene kennt.

e) Ist das Original ein Tetraeder, so muss das Bild ein Viereck sein. Es bestehen die Zahlenwerte  $\alpha = 6, b = 5; x = 3$ .

Man setze die Längen dreier anstossenden Kanten  $A^r B^r, A^r C^r, A^r D^r$  (des Tetraeders  $A^r B^r C^r D^r$ , von gegebenem Bilde

---

\* Die unendlich fernen Geraden von Original- und Bildebene entsprechen sich. Zu ihnen sind alle Geraden ihrer Ebenen als parallel anzusehen, daher diese Unbestimmtheit in der Richtung der Transversalen im Gegensatz zu Nr. 1;  $a^r, b^r \dots$  und  $a, b, \dots$  werden hier von irgend zwei Transversalen ihrer Ebenen in ähnlichen Reihen geschnitten.

$ABCD$ ) fest. Wählt man  $A'$  in der projizierenden Linie des Bildpunktes  $A$ , so giebt es für  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  je zwei Lagen  $A_1'$ ,  $B_2'$  über  $B$  etc. So entstehen die acht Originaltetraeder  $A'B_1'C_1'D_1'$ ,  $A'B_1'C_1'D_2'$ , ... welche paarweise in Bezug auf die durch  $A'$  gehende mit  $P$  parallele Ebene orthogonal-symmetrisch sind.

f) Für eine einzelne Strecke  $A'B'$  als Objekt hängt die Lage der Projektionsrichtung  $p'$  von nur einer Bedingung ab. Es kommt allein auf den von  $p'$  mit  $A'B'$  gebildeten Winkel an. Die aufgestellte Formel geht über in  $x = o + 1 - b = 1 + 1 - 1 = 1$ . Ist das Bild  $AB$  der Strecke bekannt, so kann man für die Strecke und ihre Lage zu dem Bilde eine Bedingung fordern. In der Regel wird man entweder die Länge von  $A'B'$  wählen (dann ist die Lage bestimmt) oder den Neigungswinkel mit der Projektion (wodurch die Länge bestimmt wird). — In dem Trapeze  $A'B'AB$  sind die Längen  $A'B'$ ,  $AB$  und die Differenz  $A'A - B'B$  abhängig. Durch zwei dieser Stücke ist das dritte bestimmt: Die Angaben einzelner Strecken des Originals oder des Bildes sind einfache Bedingungen.

Für einen Kreis wird ebenfalls die Lage der Projektionsrichtung zu dem Objekte von nur einer Bedingung abhängen, s. folg. Nummer.

48. Ist das Objekt ein Kreis, so hängt die Lage der Projektionsrichtung zu demselben von nur einer Bedingung ab und es besteht die Formel  $x = o + 1 - b$ . Dabei ist weiter  $o = 1$ , denn der Kreis ist durch seinen Radius bestimmt, also ist  $x = 2 - b$ . In dieser Formel aber ist  $x = 0$ , denn wenn das Bild gegeben ist, so ist auch das Original bekannt (Nr. 35). Schliesslich folgt  $b = 2$ , das Kreisbild ist durch zwei Stücke oder Bedingungen bestimmt.

Letzteres Resultat lässt sich leicht bestätigen. Die Kreisbilder unterscheiden sich lediglich durch die Längen ihrer Axen. (Sie sind in der Gleichungsform  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, sämtlich ent-

halten und es sind darin  $a$  und  $b$  willkürlich.) — Der Lage und Gestalt nach hängt bekanntlich ein Kreisbild von fünf Bedingungen ab, es ist z. B. durch fünf Elemente bestimmt. Da hiervon drei sich bloss auf die Lage in der betreffenden Ebene beziehen, verbleiben für die Unterscheidung ihrer Gestalt noch zwei Bedingungen. (Von den fünffach unendlich vielen Kreisbildern in einer Ebene sind je dreifach unendlich viele kongruent.)

Wenn man in der Bildebene über die Bilder der Rechtwinkelpaare eines ebenen Systems verfügt, so entfällt hierauf nur eine Bedingung, so lange nämlich, wie hier stets vorausgesetzt wird, beliebige Parallelverschiebungen und Drehungen der Figuren ohne Einfluss sind. Abgesehen von dem Zusammenhang mit den Kreisbildern kann man nämlich alle diese Systeme der Rechtwinkelpaarbilder, die möglich sind, an demselben Scheitel  $O$  der Bildebene vereinigen und so drehen, dass ihre „Axen“ (d. i. ihre rechtwinkligen Paare) sich decken. Wenn man dann zu einem Strahle  $a$  aus  $O$  den gegenüberliegenden  $a_1$  festsetzt, so sind alle die Paare des Systems bestimmt (Nr. 3). Indem man den  $a$  zugeordneten Strahl  $a_1$  auf alle mögliche Weise wählt,\* entstehen alle die genannten Systeme, welche sich somit in der That als von nur einer Bedingung abhängig zeigen.

Durch Angabe dieses Systems der gegenüberliegenden Linien und durch eine weitere Bedingung ist nunmehr das Kreisbild bestimmt. In Fig. 80 (S. 134) seien am Scheitel  $P$  gegeben die ausgezeichneten gegenüberliegenden Linien  $i, i_1$  und das Paar  $a, a_1$ . Auf  $i$  soll das Kreisbild den Abschnitt  $PP_1$  liefern; man konstruiere das Kreisbild. Würde man  $a, a_1$  zu einem Parallelogramm ergänzen, dessen  $P$  gegenüberliegende Ecke in  $P_1$  liegt, so wären die zwei übrigen Ecken Punkte des Kreisbildes. Um aber die zweite Axe, welche in die Mittelsenkrechte  $g$  der Strecke  $PP_1$  fällt, zu finden, wählt man

---

\* Bekanntlich kommen nur die Fälle in Betracht, in denen  $a, a_1$  zusammen durch alle vier von den Axen gebildeten Quadranten hindurchgehen (Nr. 2).



Winkel ist, so wird  $PP_1$  die kleine und  $NN_1$  die grosse Axe des Kreisbildes sein.

Kreise in parallelen Ebenen, von beliebigen Radien, projizieren sich als ähnliche Bilder in paralleler Lage. Ein einfaches Beispiel bietet der abgekürzte gerade Kreiskegel mit den Basiskreisen  $k_1r, k_2r$ . Die Bilder  $k_1, k_2$  sind ähnlich und in paralleler Lage, ihre kleinen Axen liegen in einer Geraden, in welche das Bild der Axe des Kegels fällt und auf welcher sich die Umrisserzeugenden schneiden. Es besteht hier die Formel  $x = o + 1 - b = 0$ . Die Lage der Projektionsrichtung zu dem Kegel hängt von nur einer Bedingung ab und durch sein Bild ist der Kegel bestimmt.

49. Wenn das Bild  $ABCD \dots$  eines ebenen Polygons  $A^rB^rC^rD^r \dots$  von  $n$  Ecken und Seiten gegeben ist, so kann man nach Nr. 47, a) bezüglich des Originals und die Stellung seiner Ebene zu dem Bilde noch über zwei Bedingungen verfügen.

Wählt man die Originallängen zweier anstossenden Seiten  $A^rB^r, B^rC^r$  (gleich oder grösser wie  $AB, BC$ ), so lässt sich das Original bestimmen. Hierbei wird die Ecke  $B^r$  beliebig vertikal über  $B$  angenommen. Darauf giebt es zwei vertikal über  $A$  liegende Punkte  $A_1^r, A_2^r$ , so dass  $A_1^rB^r, A_2^rB^r$  die Länge von  $A^rB^r$  haben. Ebenso findet man mit Hilfe der zweiten Originallänge zwei Punkte  $C_1^r, C_2^r$  über  $C$ . Zu dem Dreiecke  $ABC$  als Bestandteil des Bildes gehören die Dreiecke  $A_1^rB^rC_1^r, A_2^rB^rC_2^r; A_1^rB^rC_2^r, A_2^rB^rC_1^r$  als Bestandteile des Originals. Die Originalebene ist damit vierdeutig bestimmt. Für jede dieser Lagen lässt sich das Original mit Hilfe der projizierenden Linien durch  $D, E, \dots$  vervollständigen (Nr. 47, a). Aus den bestehenden symmetrischen Lagen von  $A_1^r, A_2^r; C_1^r, C_2^r$  in Bezug auf die durch  $B^r$  zu  $P$  gelegte parallele Ebene folgt, dass zwei verschiedene Originalfiguren, jede in zwei symmetrischen Stellungen zu der Bildebene, vorhanden sind. — In gleicher Weise findet man  $A^rB^rC^rD^r \dots$ , wenn zu zwei beliebigen Seiten, etwa  $AB, CD$  die Originallängen bekannt sind. Man wählt  $A^rB^r$  vertikal über  $AB$  von der vorgeschriebenen

Länge (Nr. 47f.), desgleichen  $C^r D^r$  über  $CD$ . Hierauf wird  $C^r D^r$  in vertikaler Richtung so verschoben, dass sie mit  $A^r B^r$  in einerlei Ebene liegt. Diese Ebene ist die „Originalebene“ und es liegen in ihr die weiteren Ecken vertikal über ihren Bildern. Das Verhalten der vier Lösungen ist genau wie vorhin angegeben wurde.

Wenn aber die Gestalt des Dreiecks  $A^r B^r C^r$  gefunden ist, so kann man das Original offenbar auch in der folgenden Weise ergänzen. Man schneide  $AC$  mit den Strahlen  $BD$ ,  $BE$ , ... oder  $B$ ,  $D$ ,  $E$ , ... in den Punkten  $D_1$ ,  $E_1$ , ... Darauf konstruiere man in  $A^r C^r$  diejenigen Punkte  $D_1^r$ ,  $E_1^r$ , ... für welche die Teilverhältnisse  $A^r D_1^r : C^r D_1^r$ ,  $A^r E_1^r : C^r E_1^r$ , ... mit den Teilverhältnissen  $AD_1 : CD_1$ ,  $AE_1 : CE_1$ , ... nach Grösse und Vorzeichen übereinstimmen. Auf den Strahlen  $B^r$ ,  $D_1^r$ ,  $E_1^r$ , ... bestimmt man endlich diejenigen Punkte  $D^r$ ,  $E^r$ , ... für welche die Teilverhältnisse  $B^r D^r : D_1^r D^r$ ,  $B^r E^r : E_1^r E^r$ , ... mit  $BD : D_1 D$ ,  $BE : E_1 E$ , ... gleich sind. Man wird bemerken, dass bei dieser Konstruktion im allgemeinen die Übereinstimmung von  $2(n-3)$  Teilverhältniswerten zu Grunde gelegt wird und dass die Beziehung zwischen beiden Figuren eine umkehrbare ist. (In gewissen Fällen reduziert sich die Anzahl der Teilverhältnisse; welche für beide Figuren dieselben Werte haben müssen, z. B. wenn oben zwei Ecken des Bildes auf demselben Strahle aus  $B$  liegen; es liegen dann die entsprechenden Ecken auf demselben Strahle aus  $B^r$  und dieses Vorkommnis reduziert jene Anzahl  $2(n-3)$  um eine Einheit.)

Man wird ferner finden, dass jene  $2(n-3)$  Teilverhältnisse in dem allgemeinen Falle voneinander unabhängig sind. Die Ecke  $D$  z. B. liefert  $AD_1 : CD_1$  und  $BD : D_1 D$ , welche zusammen die Lage des Punktes  $D$  zu dem Dreiecke  $ABC$  ausdrücken. In gleicher Weise wird auch beim Original die Lage jeder Ecke durch zwei neue, unabhängige Teilverhältnisse bestimmt. Es soll nun der Satz bewiesen werden, dass für zwei Polygone von  $n$  Ecken und Seiten, für welche jene  $2(n-3)$  Teilverhältnisse (welche die Lage der übrigen Ecken zu den drei ersten ausdrücken) übereinstimmen, überhaupt alle Teilverhält-



nisse, entstehend durch die Ecken und die Schnitte von Seiten und von Diagonalen, gleich sind. Daraus folgt als Zusatz, dass bei einem Polygon von  $n$  Ecken und Seiten im allgemeinen alle durch die Schnitte von Seiten und von Diagonalen entstehenden Teilverhältnisse\* durch 2 ( $n - 3$ ) unabhängige unter ihnen bestimmt sind.

Das Verfahren des nun zu behandelnden Beweises kommt einer einfachen konstruktiven Lösung des Problems gleich. Indessen ist die Grundlage von der Orthogonalprojektion unabhängig. Es soll nämlich das  $ABCD\dots$  entsprechende Polygon  $A^rB^rC^rD^r\dots$  konstruiert werden, wenn das  $ABC$  entsprechende Dreieck  $A^rB^rC^r$  in ganz beliebiger Gestalt gegeben ist, gleichgültig ob  $ABC$  eine Orthogonalprojektion desselben sein kann oder nicht. Im übrigen sollen wieder die Teilverhältnisse  $AD_1:CD_1$ ,  $BD:D_1D$ ; u. s. f. mit  $A^rD_1^r:C^rD_1^r$ ,  $B^rD^r:D_1^rD^r$ , u. s. f. übereinstimmen. — Man wähle ein mit  $A^rB^rC^rD^r\dots$  ähnliches Polygon  $A'B'C'D'\dots$ , bei welchem die Seite  $A'C'$  mit  $AC$  von gleicher Länge ist. Die Polygone  $ABCD\dots$  und  $A'B'C'D'\dots$  lege man so aneinander, dass  $A'$  auf  $A$  und  $C'$  auf  $C$  fällt. Dann gelangen auch die  $D_1^r$ ,  $E_1^r$ , ... entsprechenden Punkte  $D_1^r, E_1^r, \dots$  mit  $D_1, E_1, \dots$  einzeln zur Deckung. Aus  $BD_1:D_1D = B'D_1:D_1D'$  folgt, dass  $BB'$  und  $DD'$  parallel sind. In gleicher Weise zeigt man, dass überhaupt  $DD', EE', \dots$  mit  $BB'$  parallel sind. Die entsprechenden Ecken der beiden Polygone liegen auf parallelen Strahlen und es stehen offenbar ihre Abstände von der Linie  $AC = A'C'$  als Axe in demselben Verhältnisse zu einander. Aus diesen beiden Eigenschaften folgt, dass die entsprechenden Seiten (bezüglich Diagonalen) beider Figuren (Systeme) sich auf der Axe schneiden müssen. Es sind somit die beiden Polygone  $ABCD\dots$  und das mit  $A^rB^rC^rD^r\dots$  ähnliche  $A'B'C'D'\dots$  centrisch-affin mit  $AC$  als Axe. Es stimmen also alle entsprechenden Teilverhältnisse bei  $ABCD\dots$

---

\* Es handelt sich hier lediglich um Teilverhältnisse je dreier in Geraden liegender Punkte.

und  $A'B'C'D'...$ , also auch bei  $ABCD...$  und  $A^rB^rC^rD^r...$  überein. — Das Polygon  $A^rB^rC^rD^r...$  wird nun am einfachsten als ein solches konstruiert, welches einem zu  $ABCD...$  centrisch-affinen Polygone ähnlich ist. Diese Lösung ist stets und zwar eindeutig ausführbar, wenn  $ABCD...$  und von  $A^rB^rC^rD^r...$  das Dreieck  $A^rB^rC^r$  gegeben sind. Die Beziehung zwischen diesen Polygonen, welche auf der Gleichheit der unabhängigen Teilverhältnisse beruht, nennt man Affinität.\*

Die zwischen den beiden Polygonen  $ABCD...$  und  $A^rB^rC^rD^r...$  bestehende Beziehung der Affinität liefert zu jedem Punkte  $P$  in der Ebene des ersten Polygons einen eindeutig entsprechenden  $P^r$  in der Ebene des zweiten, und umgekehrt. Denkt man sich für beide Ebenen alle entsprechenden Punktpaare bestimmt, so hat man zwei affine ebene Systeme hergestellt. Bezüglich ihrer entsprechenden Punkte gilt überall die Gleichheit der homologen Teilverhältnisse. Längs jeder Geraden des einen Systems als Axe kann man zwei ihm centrisch-affine Systeme konstruieren, welche dem anderen Systeme ähnlich sind. (Beide Systeme sind zu der Axe orthogonal-symmetrisch.) Sollten aber die affinen Systeme entsprechende Strecken von gleicher Länge aufweisen, so könnten sie ohne Ähnlichkeits-Reduktion zu centrisch-affinen Systemen zusammengelegt werden; vergl. die speziellere Definition der Affinität in Nr. 14, dazu Nr. 58.

Entsprechende Gebilde affiner Systeme heissen ebenfalls affin. Einer geraden Punktreihe entspricht wieder eine solche und zwar sind die beiden stets ähnlich, im speziellen Fall gleich oder kongruent, nämlich wenn ihre entsprechenden Strecken gleich lang sind. Einem Strahlenbüschel entspricht wieder ein solches, solch' affine Büschel sind in Nr. 1 besprochen worden. — Schliesslich ist überhaupt die Ähnlichkeit (und auch die Kongruenz) ein spezieller Fall der Affinität. Denn bei zwei ähnlichen ebenen Systemen stimmen jene

---

\* Möbius, Baryc. Calcul, Werke I. Zech, Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. XVII.

entsprechenden Teilverhältnisse überein. Die Besonderheit bei der Ähnlichkeit gegenüber der Affinität besteht darin, dass zu der Gleichheit der Teilverhältnisse die Gleichheit aller entsprechenden Winkel hinzutritt; in dem allgemeinen Falle dagegen sind nur gewisse Systeme entsprechender Winkel gleich (Nr. 58, S. 184). Offenbar geht die Affinität in Ähnlichkeit über, sobald zwei entsprechende Dreiecke übereinstimmend-ähnlich sind; zugehörige centrisc-affine Systeme decken sich dann.

An dieser Stelle soll es sich in erster Linie darum handeln, das Verhalten affiner Systeme bezüglich einer Orthogonalprojektion zu untersuchen. In dieser Beziehung aber verhalten sie sich wie irgend zwei ihrer entsprechenden Dreiecke. Sind nämlich drei Punkte  $A, B, C$  des einen Systems die Orthogonalprojektionen der drei entsprechenden Punkte  $A^r, B^r, C^r$  des affinen Systems, so sind alle entsprechenden Punktepaare Bilder und Originale bei dieser Projektion (denn sowohl bei der Affinität wie bei der Projektion können die weiteren entsprechenden Punktepaare in derselben Weise aus den gegebenen hergeleitet werden, S. 136). Die angestrebte Untersuchung ist damit auf die zweier entsprechenden Dreiecke der Systeme zurückgeführt.

Von zwei beliebig gegebenen Dreiecken nun kann nicht das eine  $HJK$  eine Orthogonalprojektion des anderen  $H^rJ^rK^r$  sein, sondern es ist hierzu eine Bedingung erforderlich. Nach Nr. 47, a) hat  $x$  den Wert 2; bei gegebenem Bilde hat man bezüglich des Objektes und die Lage der Projektionsrichtung über zwei Bedingungen zu verfügen. Giebt man von dem Dreiecke  $H^rJ^rK^r$  zwei Winkel an (oder die Verhältnisse der drei Seiten; abgesehen von vielen anderen Möglichkeiten), so muss man das Dreieck selbst und seine Lage zu dem Bilde finden können. Diese Fundamentalaufgabe, ein Dreieck  $H^rJ^rK^r$  so zu bestimmen, dass es einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist und das gegebene Dreieck  $HJK$  zu seiner Orthogonalprojektion hat, wird in nachfolgender Nummer gelöst. — Es wäre ferner geboten, dass man bloss über ein Stück des Dreiecks  $H^rJ^rK^r$  verfügt und eine Bedingung, die Lage der Originalebene zu der Bildebene betreffend, fordert. Letz-

tere besteht in den einfachsten Fällen darin, dass man die Richtung der Spur in Bezug auf das Bild oder den Neigungswinkel beider Ebenen angiebt. Die Lösungen solcher Probleme für Dreiecke gelten sofort für die affinen Systeme, bei denen jene Dreiecke sich entsprechen.

Zu einem ebenen Systeme giebt es dreifach unendlich viele affine Systeme, denn jedes der letzteren kann so konstruiert werden, dass es drei Bedingungen genügt. Oben hat man beispielsweise zu einem Dreiecke des ersten Systems das entsprechende Dreieck des zweiten angegeben. Giebt man zu zwei Winkeln des ersten Systems die entsprechenden Winkel des zweiten an, so giebt es noch einfach unendlich viele affine Systeme, welche gewisse getrennte (reelle oder imaginäre) Scharen ähnlicher Systeme bilden. Man darf somit nicht zu drei beliebigen Winkeln eines ebenen Systems die entsprechenden Winkel eines zu ihm affinen Systems willkürlich festsetzen.

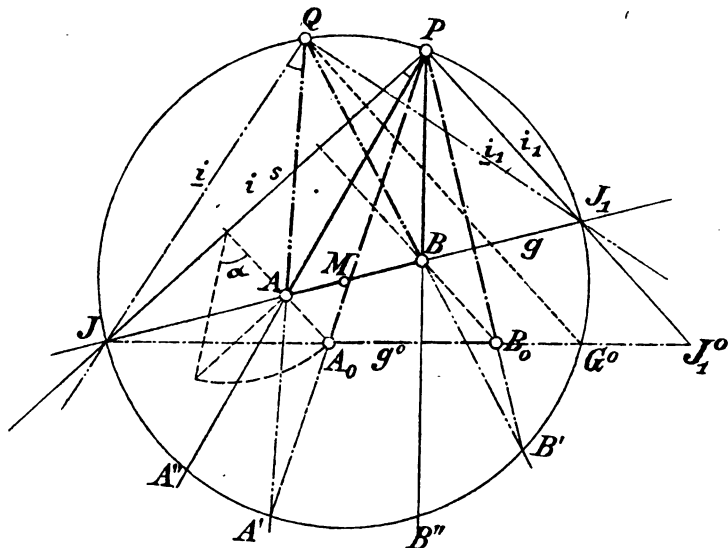
**50.** Es soll ein Dreieck von gegebener Orthogonalprojektion gefunden werden, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.\* Das gegebene Bild sei  $APB$  (Fig. 81, S. 141), das gesuchte Dreieck soll mit  $AQB$  ähnlich sein. An die gegebene Projektion  $APB$  hat man somit in derselben Ebene  $P$  ein dem zweiten gegebenen Dreiecke ähnliches Dreieck so angeschlossen, dass in  $g = AB$  zwei entsprechende Ecken zur Deckung gelangen. Die Punkte  $P$  und  $Q$  sind zugeordnete (Nr. 10). (Die Dreiecke liegen hier auf derselben Seite der Anschlusslinie, weshalb der  $P$  zugeordnete Punkt mit  $Q$  bezeichnet ist; liegen die Dreiecke auf entgegengesetzter Seite von  $g$ , so bezeichne man das zweite mit  $ARB$ .) — Man bestimme nun die durch  $P$  gehenden Bilder von Haupt- und Falllinie. Sie sind zusammen das rechtwinklige Paar gegenüberliegender Linien  $i$  und  $i_1$  (Nr. 12, S. 37). Ihre Schnittpunkte  $J, J_1$  mit  $g$  liegen mit  $P, Q$  (und  $R$ ) auf dem-

---

\* Die Auflösung dieser Aufgabe ist wohl zum ersten Male versucht worden in Guglers Lehrbuch der deskr. Geometrie, 2. Aufl. 1857, Nr. 145.

selben Kreise, dessen Centrum  $M$  in  $g$  fällt. Die Spurlinie  $s$  der Originalebene ist nun parallel mit  $i$  oder mit  $i_1$ . (Würde man abweichend von den bisherigen Voraussetzungen  $APB$  als dem Bilde ähnlich und  $AQB$  als dem Originale kongruent, oder  $APB$  als dem Originale ähnlich und  $AQB$  als

Fig. 81.



das Bild, u. s. f., betrachten, so würden die nachfolgenden Konstruktionen unwesentlich modifiziert.)

Die Entscheidung, ob  $i$  oder  $i_1$  Hauptlinie sein wird, kann durch den Vergleich zweier entsprechenden Winkel geschehen. Man schneide den Hilfskreis mit  $PA$  in  $A''$  und mit  $QA$  in  $A'$ . Da  $A''$  zwischen  $J$  und  $A'$  liegt (also überhaupt der Bogen  $JA'$  grösser ist als der Bogen  $JA''$ ), so ist der Originalwinkel  $JQA$  grösser als sein Bild  $JPA$ . Da ein an der Hauptlinie liegender spitzer Winkel durch Orthogonalprojektion kleiner wird, so ist  $i$  das Bild der Hauptlinie. ( $PJ_1$  ist das Bild einer Falllinie; der an der Falllinie anliegende spitze Winkel gleich  $AQJ_1$  geht durch Projektion in den grösseren Winkel  $APJ_1$  über.) — In der angestrebten

Entscheidung kann man noch einfacher die entsprechenden Winkel (der affinen Systeme  $PBAJ\dots$  und  $QBAJ\dots$ ) gebildet von  $i$  mit  $g$  und von  $\underline{i}$  mit  $g$ , betrachten. Auch hier ist  $(i, g)$  das Bild des grösseren, mit  $(\underline{i}, g)$  gleichen Winkels. — Alle derartigen Vergleichen führen übereinstimmend zu dem Resultate, dass das durch  $P$  gehende Bild der Hauptlinie die Gerade  $g$  in demjenigen der beiden Punkte  $J, J_1$  trifft, welcher denjenigen durch die zugeordneten Punkte  $Q, R$  begrenzten Bogen des Hilfskreises, welcher den Punkt  $P$  nicht enthält, halbiert.

Diese durch  $P$  gehende Hauptlinie  $i$  (Fig. 81) wähle man als die Spur  $s$  der Originalebene. Dann muss ein mit  $AQB$  ähnliches Dreieck vorhanden sein, das zu  $APB$ , mit  $i$  als Affinitätsaxe, orthogonal centrisch-affin ist; dasselbe ist die Umlegung des Originaldreiecks. Es entsteht, wenn man die von  $\underline{i}$  mit  $QA, QB$  gebildeten Winkel bei  $P$  an  $i = s$  anträgt, und mit den Endschenkeln die Affinitätsstrahlen der Punkte  $A$  und  $B$  schneidet; der  $Q$  entsprechende Punkt ist  $P$ . Das Antragen jener Winkel geschieht aber einfach dadurch, dass man die zweiten Schnittpunkte  $A', B'$  von  $QA, QB$  mit dem Hilfskreise mit  $P$  verbindet. In dieser Weise entsteht die gesuchte Umlegung  $A_0PB_0$  des Originaldreiecks. — Das konstante Verhältnis der Abstände der Bildpunkte  $(A, B)$  und der umgelegten Originalpunkte  $(A_0, B_0)$  von der Spur  $s$  ist der Cosinus des Neigungswinkels  $\alpha$  der Originalebene zu der Bildebene. Dreht man das Dreieck  $A_0PB_0$  um  $s$  als Axe und um den Winkel  $\pm \alpha$ , so entsteht ein Dreieck  $A'PB'$ , womit das Originaldreieck in seiner richtigen Lage zu dem Bilde gefunden ist. Die Lösung der Aufgabe ist eindeutig, insofern als nur ein Originaldreieck existiert, dieses allerdings in den beiden symmetrischen Lagen zu der Bildebene. Allgemein besteht somit der Satz: Jedes von zwei affinen ebenen Systemen kann auf eine bestimmte Weise als Orthogonalprojektion eines dem anderen Systeme ähnlichen Systems erhalten werden.

Handelt es sich nicht speziell um die beiden Dreiecke, sondern vielmehr um die durch sie bestimmten affinen Systeme,

so kann man in Fig. 81  $APB$  und  $AQB$  durch zwei Dreiecke von den Scheiteln  $P$  und  $Q$ , deren gemeinsame Basis beliebig in  $g$  liegt, ersetzen. Zwei solche entsprechende Dreiecke der affinen Systeme sind  $JPJ_1$  und  $JQJ_1$ , welche auch im voraus gegeben sein könnten. Ersteres ist das Bild eines dem letzteren ähnlichen Dreiecks; der Vergleich der entsprechenden Katheten ergibt  $JQ < JP$ ,  $QJ_1 > PJ_1$ . Macht man  $JPJ_1^0$  dem Dreiecke  $JQJ_1$  ähnlich, so geht es durch Drehung um  $JP = s$  und um den Winkel  $\pm \alpha$  in das  $JPJ_1$  entsprechende Originaldreieck über; hierbei ist  $PJ_1^0 > PJ_1$ , vergl. S. 179, und  $\frac{PJ_1}{PJ_1^0} = \cos \alpha$ . Die Hypotenuse  $JJ_1^0 = g^0$  wird als die Linie  $JG^0$  konstruiert, wobei  $G^0$  der Schnittpunkt des Hilfskreises mit der aus  $Q$  zu  $PJ_1$  gezogenen Parallelen ist. Es zeigt sich, übereinstimmend mit S. 142, dass diejenige der Linien  $PJ$ ,  $PJ_1$  als Spur  $s$  auftritt, welche grösser ist als ihre entsprechende Linie  $QJ$ , bezüglich  $QJ_1$ .

In Fig. 81 kann der Fall eintreten, dass die zugeordneten Punkte  $P$ ,  $Q$  auf einer Senkrechten zu  $g$  liegen. Dann liegen  $i$ ,  $i_1$  und  $i$ ,  $i_1$  bezüglich parallel und senkrecht zu  $g$ . Liegt hierbei  $P$  näher an  $g$ , wie  $Q$ , so darf  $g = AB$  als Spur gewählt werden. Das Dreieck  $AQB$  ist dem Originaldreiecke kongruent, dasselbe ist schliesslich um  $g$  zu drehen, bis  $Q$  vertikal über  $P$  liegt. — Im entgegengesetzten Falle ist  $PQ$  (oder eine damit Parallele) die Spur. Zieht man diesfalls aus  $P$  bis nach  $g$  die Parallelen  $PA_0$  zu  $QA$  und  $PB_0$  zu  $QB$ , so lässt sich endlich das Dreieck  $A_0PB_0$  um  $PQ$  so drehen, dass  $APB$  die Orthogonalprojektion des gedrehten Dreiecks ist. In diesen beiden Fällen bleibt somit die Aufgabe eindeutig lösbar. — Wenn ausnahmsweise  $P$  und  $Q$  sich decken, so sind  $J$  und  $J_1$  unbestimmt. Jede Gerade in der Ebene  $APB$ , namentlich auch die unendlich ferne, kann als die Spur der Originalebene gewählt werden. Die Originalebene fällt hier mit der Bildebene zusammen oder es sind die beiden Ebenen parallel, denn nach Fig. 81 wird  $\alpha = 0$ , weil  $A_0$  in  $A$ ,  $B_0$  in  $B$  fällt. Unter Beschränkung auf die Dreiecke handelt es sich hier darum,  $APB$  als das Bild eines ihm ähn-

lichen Dreiecks darzustellen, wobei die Originale und die Bilder aller einzelnen Dreieckswinkel übereinstimmen sollen. Es zeigt sich, dass Original und Bild kongruent sein müssen. Sie sind von einander verschiedene oder zusammenfallende Normal-schnitte eines dreiseitig-prismatischen Raumes. — Dass die Dreiecke  $APB$ ,  $AQB$  ähnlich sein können, ohne dass  $P$  und  $Q$  sich decken, ist einleuchtend. Es bestehen dann die Konstruktionen des allgemeinen Falles und es ist höchstens ein Winkel des Bildes seinem Originale gleich.

**Anhang.** Die Aufgabe, ein Dreieck zu finden, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist und eine gegebene Orthogonalprojektion hat, lässt sich auf die folgende zurück-führen: Es soll eine Orthogonalprojektion gefunden werden, bei welcher drei gegebene Strahlen eines Büschels  $S^r$ .  $a^r$ ,  $b^r$ ,  $c^r$  ein gegebenes Bild  $S$ .  $a$ ,  $b$ ,  $c$  haben.\* Bei jenen Dreiecken kommt es nämlich nur auf die Richtungen der Seiten an und man kann jedes der Dreiecke durch drei aus einem Punkte zu seinen Seiten parallel gezogenen Linien ersetzen. Diese Büschel mögen wieder allgemein als entsprechende in zwei affinen Systemen gedacht werden.

Um die Lage der Originalebene zu dem Bilde zu finden, lege man ein mit  $S^r$ .  $a^r$ ,  $b^r$ ,  $c^r$  kongruentes Büschel  $S'$ .  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  so in die Bildebene  $S$ .  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , dass  $c'$  mit  $c$  parallel liegt. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte  $A$  von  $a'$  mit  $a$  und  $B$  von  $b'$  mit  $b$  ist die Anschlusslinie  $g$  (Fig. 82, S. 145). Hierauf legt man den durch die zugeordneten Punkte  $S$ ,  $S'$  gehenden Kreis, dessen Centrum in  $g$  fällt. Seine Schnittpunkte  $J$ ,  $J_1$ , mit  $S$  verbunden, ergeben die rechtwinkligen gegenüberliegenden Linien des Büschels  $S$ . In Fig. ist der oben angegebenen Unterscheidung gemäss  $i$  das Bild einer Hauptlinie. Man wähle  $i = s$  als Spur der Originalebene. Nun wird das Büschel  $S'$  gedreht, bis  $S'$  in  $S$ ,  $i'$  in  $i$  fällt. Dabei gehen  $a'$  in  $(a)$ ,  $b'$  in  $(b)$  und  $c'$  in  $(c)$  über und es schneiden sich bezüglich

---

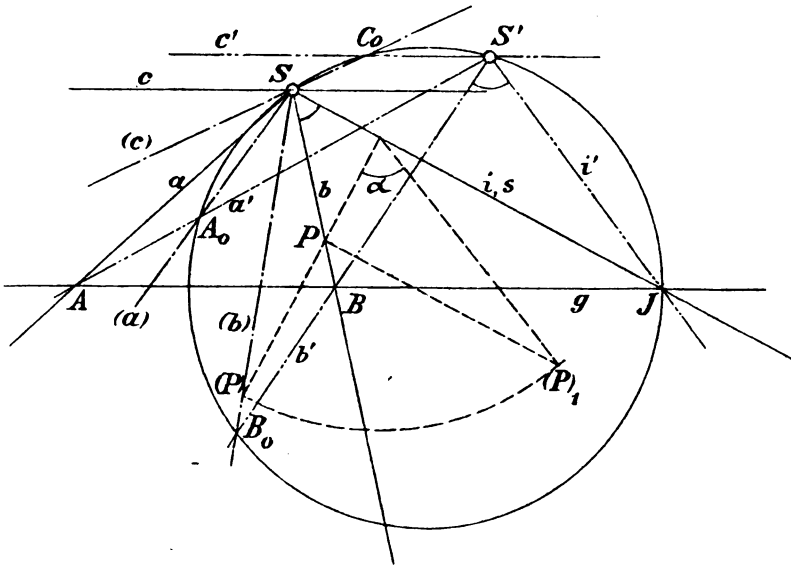
\* Kennt man zu drei Richtungen eines ebenen Systems die Richtungen der drei Bilder, so ist die gegenseitige Lage der Originalebene und der Bildebene bestimmt. Die Abzählung ergibt in der That  $o = b = 2$ ;  $x = 2$ .



$a', (a); b', (b); c', (c)$  in den Punkten  $A_0, B_0, C_0$  des Hilfskreises. Wenn man endlich das System  $(a), (b), (c)$  um  $s$  und um  $\pm \alpha$  dreht, so wird  $a, b, c$  seine Orthogonalprojektion sein.

Hier wurde die Ebene des Systems  $S. a, b, c$  als Bildebene und als Zeichnungsfläche benutzt. Durch Drehung um

Fig. 82.



$s$  und um den Winkel  $\alpha$  geht aus ihr die Originalebene hervor. In späteren Anwendungen kommt es vor, dass die Zeichnungsfläche die Originalebene vorstellt. Dann hat man einfach mit dieser Ebene je die entgegengesetzte der vorigen Drehung zu vollziehen, um die Lage der Bildebene (auf welcher die projizierenden Linien senkrecht stehen) zu erhalten.

51. Es sollen einige Fundamentalaufgaben der orthogonalen Axonometrie behandelt werden. Den abzubildenden Raum denkt man sich in starrer Verbindung mit dem Axensysteme  $O^r. x^r y^r z^r$ . Anstatt die Lage der Projektionsrichtung  $p^r$  zu dem Axensysteme im voraus anzugeben, kann

man auch in anderer Weise über die zwei Bedingungen, von denen die Projektion abhängt, verfügen.

Man darf das Bild  $N. xyz$  des Axensystems beliebig wählen. Denn es handelt sich hierbei nur um die Angabe zweier der Winkel  $(xy) = \zeta$ ,  $(yz) = \xi$ ,  $(zx) = \eta$ . Mit Hilfe eines Spurendreiecks  $XYZ$ , das spitzwinklig sein muss, dessen Seiten im übrigen auf  $z$ ,  $y$ ,  $x$  senkrecht stehen, findet man (Nr. 21) die Stellung des Axensystems zu der Bildebene.

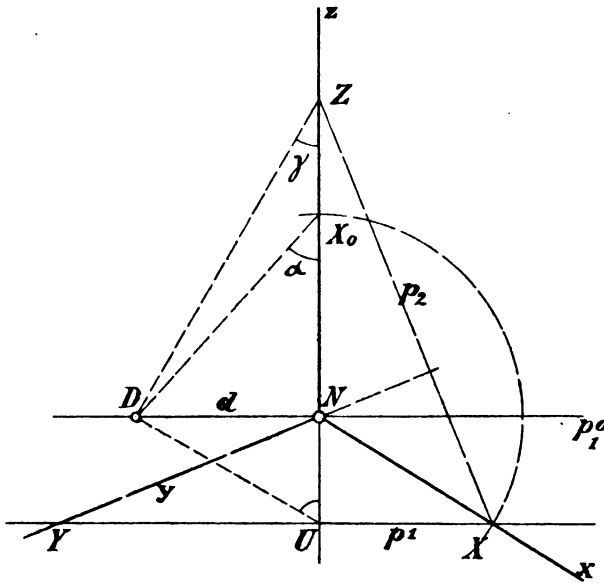
Häufig verfügt man weiterhin in der Weise, dass man von den drei abhängigen Neigungswinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  der Axen  $x^r$ ,  $y^r$ ,  $z^r$  zu der Bildebene, bezüglich zu ihren Bildern, zweie willkürlich wählt. Die Cosinus der beiden Winkel  $\alpha$ ,  $\gamma$  sind die Verkürzungsverhältnisse für die Axen  $x$ ,  $z$ . Man hat somit in diesem Falle die Massstäbe zweier Axen gewählt. In eingekleideter Form lautet die vorliegende Aufgabe: Ein Würfel von gegebener Kantenlänge  $e$  soll so projiziert werden, dass zwei Kantenbilder die Längen  $e_1$ ,  $e_3$  haben. Trägt man nämlich auf den Endschenkeln der gegebenen Winkel  $\alpha$ ,  $\gamma$  die Länge  $e$  ab, so projiziert sich dieselbe (orthogonal) auf den Anfangsschenkel, bezüglich als Länge  $e_1$ ,  $e_3$ ; dieselben Figuren (Trapeze) lassen  $\alpha$ ,  $\gamma$  aus  $e$ ,  $e_1$ ,  $e_3$  finden.

Das Bild  $z$  sei der Lage nach gegeben, man wähle darauf den Punkt  $N$  und lege  $p_1^0$  durch  $N$  senkrecht auf  $z$  (Fig. 83, S. 147). Auf  $p_1^0$  trägt man von  $N$  aus eine willkürliche Distanz  $ND$  oder  $d$  ab. Durch  $D$  werden zwei Geraden gezogen, welche mit  $z$  die Winkel  $\alpha$ ,  $\gamma$  bilden. Sie schneiden  $z$  in  $X_0$ ,  $Z$ . Auf  $ZD$  errichte in  $D$  die Senkrechte, welche  $z$  in  $U$  schneidet. Durch  $U$  ziehe  $p_1$  parallel  $p_1^0$ . Um  $N$ , mit  $NX_0$  als Radius, schlage man einen Kreis, welcher  $p_1$  einmal in  $X$  schneidet. — Es wird nun der um  $ND$  vertikal über  $N$  gelegene Punkt  $O^r$  mit  $Z$  und  $X$  verbunden, zwei senkrechte Linien liefern (weil  $X$  in  $p_1$  liegt, Nr. 18) und welche mit  $z$ ,  $x$  bezüglich die Winkel  $\gamma$ ,  $\alpha$  bilden. — Nun lege man noch zu  $ZX$  oder  $p_2$  die Senkrechte  $y$  durch  $N$  und durch  $Z$  die Senkrechte  $p_3$  zu  $x$ ; beide müssen sich in  $Y$  auf  $p_1$  schneiden (es entsteht das Dreieck  $XYZ$  mit seinen drei Höhen). — Konstruiert

man mit  $d$  und  $NY$  als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck, so enthält dasselbe  $d$  gegenüberliegend den (von  $\alpha$ ,  $\gamma$  abhängigen) Winkel  $\beta$  und es ist seine Hypotenuse gleich dem Abschnitte  $O'Y$  der räumlichen  $y$ -Axe.

Die Konstruktion gelingt nur, wenn  $\alpha < 90 - \gamma$  oder  $\alpha + \gamma < 90^\circ$ . Denn es würde im entgegengesetzten Falle der

**Fig. 88.**



Kreis  $NX_0$  die Linie  $p_1$  nicht schneiden. Für  $\alpha + \gamma = 90^\circ$  (also  $\cos \gamma = \frac{e_3}{e} = \sin \alpha$ ) würde Berührung stattfinden, also  $X$  nach  $U$  fallen und  $Y$  unendlich fern liegen. Die  $y^r$ -Axe wäre der Bildebene parallel u. s. w. (vergl. Nr. 28).

Die Bedingung  $\alpha + \gamma < 90^\circ$  lässt sich in einfacher Form durch die Längen  $e, e_1, e_3$  ausdrücken. Es ist  $\cos \alpha = \frac{e_1}{e}$ ,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{e^2 - e_1^2}}{e}$ ,  $\cos \gamma = \frac{e_3}{e}$ ; aus  $\gamma < 90 - \alpha$  folgt  $\cos \gamma > \cos (90 - \alpha)$ ,  $\cos \gamma > \sin \alpha$ , oder  $\frac{e_3}{e} > \frac{\sqrt{e^2 - e_1^2}}{e}$ ,  $e_3^2 > e^2 - e_1^2$ , oder

endlich  $e_1^2 + e_2^2 > e^2$ . Es entsteht ein brauchbares Spurendreieck und auch der allgemeine Fall der axonometrischen Darstellung, wenn  $e_1$  und  $e_2$  kleiner sind als  $e$  und wenn zugleich  $e_1^2 + e_2^2 > e^2$ . (Ein mit den Seitenlängen  $e_1, e_2, e$  konstruiertes Dreieck muss  $e$  gegenüberliegend spitzwinklig sein.)

52. Anstatt, wie eben geschah, zwei Massstäbe zu wählen, sollen nun die Verhältnisse der drei Massstäbe als gegeben vorausgesetzt werden. Damit verfügt man ebenfalls über zwei Bedingungen und es müssen das Axensystem der Lage nach und das Bild desselben gefunden werden können.

Nach Voraussetzung sind  $\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$ , in anderer Bezeichnung  $\frac{e_1}{e} : \frac{e_2}{e} : \frac{e_3}{e}$ , oder auch  $e_1, e_2, e_3$  bekannt. In der Regel werden diese Verhältnisse rational gewählt und durch die drei ganzen Zahlen  $e_1, e_2, e_3$  ausgedrückt. Vor allem wird man  $e$  zu bestimmen suchen, darauf sind  $\cos \alpha = \frac{e_1}{e}$ , etc., also die Massstäbe bekannt. In eingekleideter Form lautet die Aufgabe: Es soll die Kantenlänge und die Lage zu der Bildebene für einen Würfel bestimmt werden, wenn die Längen  $e_1, e_2, e_3$  der Projektionen dreier anstossenden Kanten gegeben sind.

Die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  lassen sich durch die Verhältnisse ihrer Cosinus bestimmen. Man denke sich das Axensystem  $Ox^r y^r z^r$  mit der Bildebene  $P$  im Spurendreieck  $XYZ$  geschnitten und als  $N. xyz$  auf  $P$  projiziert. Die Winkel  $O'XN, O'YN, O'ZN$  sind der Reihe nach gleich  $\alpha, \beta, \gamma$ . Also schliesst  $O'N$  mit  $x^r, y^r, z^r$  die Winkel  $a = 90 - \alpha, b = 90 - \beta, c = 90 - \gamma$  ein (Fig. 84, S. 149). Die Projektionen von  $N$  auf die drei Axen seien  $N_x, N_y, N_z$ . Wenn noch  $O'N$  die Längeneinheit vorstellt, so hat man  $O'N_x = \cos a, O'N_y = \cos b, O'N_z = \cos c$ . Aus den vorhandenen rechtwinkligen Dreiecken folgt  $(O'N_x)^2 + (N_x N')^2 = (O'N')^2, (O'N')^2 + (N' N)^2 = (O'N)^2$  und  $(O'N_x)^2 + (N_x N')^2 + (N' N)^2 = (O'N)^2$ , oder also  $(O'N_x)^2 + (O'N_y)^2 + (O'N_z)^2 = (O'N)^2$ .

Durch Division mit  $(O'N)^2$  folgt  $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$ . — Geht man auf  $\alpha, \beta, \gamma$  zurück, so lautet diese Bedingungs-

gleichung  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$ . Sie ist identisch mit  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$ .

Die zwischen  $\alpha, \beta, \gamma$  bestehende Abhängigkeit, ausgedrückt durch  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$ , nimmt durch die Einführung der Grössen  $e_1, e_2, e_3, e$  die Gestalt an  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 2e^2$ . Hieraus ist  $e$  bestimmt,  $e = \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{2}}$ . Darauf sind

$$\cos \alpha \left( = \frac{e_1}{e} \right) = \sqrt{\frac{2e_1^2}{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{-e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{-e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{2e_1^2}},$$

durch Vertauschung finden sich die Funktionen von  $\beta$  und  $\gamma$ .

Man stelle sich nun das räumliche Axensystem, dessen Bild und das Spurendreieck vor. Die Distanz  $O^r N$  diene als Längeneinheit. Dann sind  $NX, NY, NZ$  bezüglich gleich  $\operatorname{ctg} \alpha, \operatorname{ctg} \beta, \operatorname{ctg} \gamma$ . Weiter sind  $O^r U, O^r V, O^r W$  zu  $O^r N$  unter  $\gamma, \beta, \alpha$  geneigt, weshalb  $NU = \operatorname{tg} \gamma, NV = \operatorname{tg} \beta, NW = \operatorname{tg} \alpha$ . Werden nun (Fig. 85, S. 150) die von den Axenbildern eingeschlossenen stumpfen Winkel mit  $\xi, \eta, \zeta$  bezeichnet, so hat man

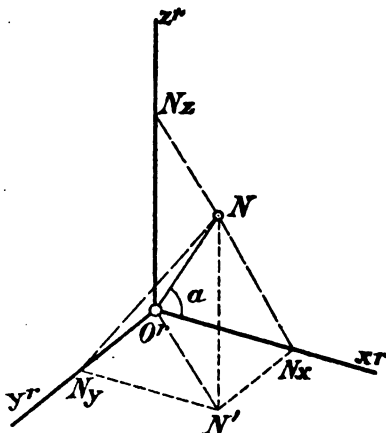
$$\operatorname{tg} \eta = -\operatorname{tg} (XNU) = -\frac{UX}{NU} = -UX \cdot \operatorname{ctg} \gamma.$$

Nach Fig. ist  $UX = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \gamma}$ , also

$$\operatorname{tg} \eta = -\operatorname{ctg} \gamma \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \gamma} = -\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \gamma - 1}, \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg} \eta = -\sqrt{\frac{2e_1^2}{-e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} \cdot \frac{2e_3^2}{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2} - 1} = -\sqrt{\frac{(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)(e_1^2 - e_2^2 + e_3^2)}{(-e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)(e_1^2 + e_2^2 - e_3^2)}}.$$

Fig. 84.

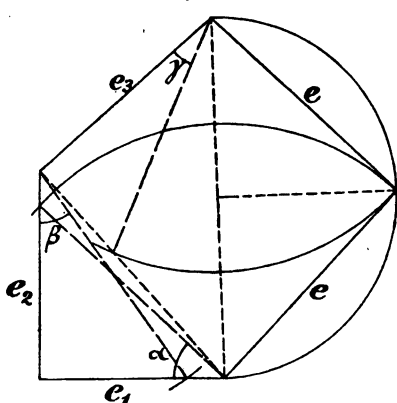




(Am genauesten wird dieser letzte Teil der Konstruktion, wenn man von den drei Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  die zwei grössten benutzt.)

Die Bedingung für die Möglichkeit der Ausführung ist offenbar die, dass  $e$  grösser als jede der Grössen  $e_1, e_2, e_3$  gefunden wird. Sei des bequemen Ausdrucks wegen  $e_1 > e_2 > e_3$ , so soll  $e > e_1$ , also  $e^2 > e_1^2$  und  $2e^2 > 2e_1^2$  sein. Also ist, da  $2e^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ ,  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 > 2e_1^2$  oder  $e_2^2 + e_3^2 > e_1^2$  die neue Form der Bedingung. Danun wegen  $e_1 > e_2 > e_3$  ohnehin  $e_1^2 + e_2^2 > e_3^2$  und  $e_1^2 + e_3^2 > e_2^2$  sind, so kann man die Bedingung der Möglichkeit durch den Satz ausdrücken: Die Summe der Quadrate von zweien der Grössen  $e_1, e_2, e_3$  muss stets grösser sein als das Quadrat der dritten. Somit muss das Dreieck von den Seitenlängen  $e_1, e_2, e_3$  ein spitzwinkliges sein.

Fig. 86.

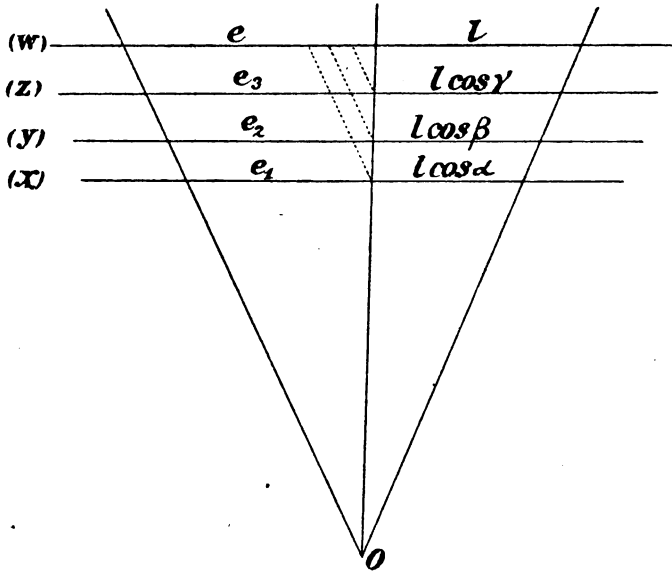


Trägt man die in Fig. 86 auftretenden Längen  $e, e_1, e_2, e_3$  so auf parallelen Linien auf, dass je beide Endpunkte auf Strahlen aus einem Punkte  $O$  liegen (was stets leicht möglich ist), so hat man die Massstäbe der drei Axen in einer Figur vereinigt, welche man den Strahlenmassstab genannt hat (Fig. 87, S. 152). Auf der Geraden  $(w)$  trage man die wahren Längen von Strecken ab und projiziere dieselben aus  $O$  auf  $(x), (y), (z)$ . Diese Projektionen sind die reduzierten Längen, welche für die Axenbilder benutzt werden. — Natürlich kann man diesen Massstab auch im umgekehrten Sinne benutzen. — Dass die Längen  $e, e_1, e_2, e_3$  voneinander abhängig sind, also auch die gegenseitige Lage der Parallelen  $(w), (x), (y), (z)$ , ist bewiesen worden. Nach dem Inhalte der gegenwärtigen und der vorangehenden Nummer ist allemal durch drei dieser Linien die vierte bestimmt. — In dem „Spezialfall“

der orthogonalen Axonometrie (Nr. 28) fallen in Fig. 87 die Linien  $(z)$  und  $(w)$  zusammen. Die übrigen,  $(x)$  und  $(y)$ , sind der Lage nach voneinander abhängig, denn es ist  $e_1 = e \cos \alpha$ ,  $e_2 = e \cos \beta = e \sin \alpha$ .

Werden zwei der Grössen  $e_1, e_2, e_3$  gleich gross, so tritt für die Neigungswinkel der darauf bezüglichen Axen und die

Fig. 87.



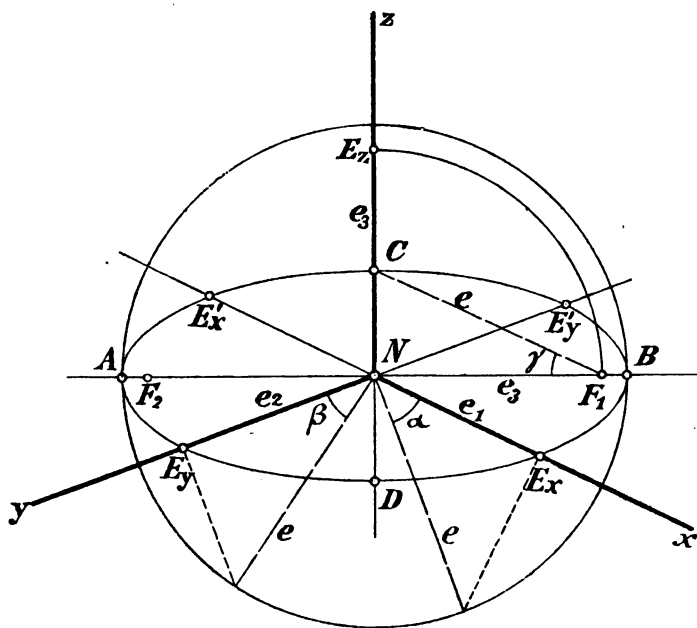
gegenüberliegenden der Winkel  $\xi, \eta, \zeta$  dasselbe ein, und umgekehrt. Im allgemeinen sind diese Einheiten und Winkel je voneinander verschieden, für jede Axe besteht ein besonderer Massstab; jeder solche Fall wird eine anisometrische Projektion genannt. Bei jeder monodimetrischen Projektion haben zwei der Axen einen und denselben Massstab und sind somit auch zwei der Winkel  $\xi, \eta, \zeta$  gleich gross. Endlich können  $e_1 = e_2 = e_3$ , also auch  $\alpha = \beta = \gamma$  (mit  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ), und  $\xi = \eta = \zeta$  ( $= 120^\circ$ ) sein; diese Projektion heisst die isometrische.

Bei der Behandlung des folgenden Beispiels über die Anwendung der Massstäbe zeigt sich der Zusammenhang



zwischen  $e, e_1, e_2, e_3$  in einer neuen Gestalt. Unter Benutzung der in Fig. 86 konstruierten Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  ist in Fig. 88 das Bild  $N. xyz$  des Axensystems konstruiert worden. Man verzeichne das Bild eines Kreises der Ebene  $x'y'r$  vom Radius  $e$  und mit  $O^r$  als Centrum. (Für ein anderes Centrum würde

Fig. 88.



man den Scheitel nach demselben verlegen.) Von der Projektion  $N$  des Mittelpunktes aus hat man auf  $x$  die Länge  $e_1 = e \cos \alpha$  abzutragen, es entstehen die Endpunkte  $E_x, E'_x$  eines Durchmessers des Bildes. Ebenso wird auf  $y$  die Länge  $e_2 = e \cos \beta$  als  $NE_y$  und  $NE'_y$  abgetragen. Damit sind zwei konjugierte Durchmesser des Kreisbildes gefunden. — Weiter ist nun  $p_1^0$  das Bild der durch  $O^r$  gehenden Hauptlinie der Ebene  $x'y'r$ . Macht man daher auf  $p_1^0$   $NA = NB = e$ , so entstehen die Scheitel  $A, B$  der grossen Axe des Kreisbildes. Die durch  $O^r$  gehende Falllinie ist zu der Bildebene unter  $90 - \gamma$  geneigt, ihr Bild ist die Linie  $z$ . Macht man somit

$NC = ND = e \sin \gamma$ , so werden  $C, D$  die Scheitel der kleinen Axe sein.

Macht man  $NE_1 = e_3 = NF_1 (= NF_2)$ , so ist  $F_1 (F_2)$  ein Brennpunkt des Kreisbildes. Denn das Dreieck  $CF_1N$  hat  $NC = e \sin \gamma$ ,  $NF_1 = e \cos \gamma$  und ist bei  $N$  rechtwinklig. Somit ist  $F_1C = e$  (gleich der halben grossen Axe) und der Winkel  $CF_1N$  gleich  $\gamma$ . Zwei konjugierte Durchmesser und die kleine Axe einer Ellipse sind der Richtung nach die orthogonalen Projektionen dreier rechtwinkligen Axen; die Verhältnisse der halben Durchmesser und der Excentricität zu der halben grossen Axe sind die entsprechenden Verkürzungsverhältnisse.\*

**53.** Die Raumfigur, gebildet aus zwei sich rechtwinklig kreuzenden Geraden  $a^r, b^r$  und ihrem kürzesten Abstände  $A^rB^r$  vom Träger  $t^r$ , ist durch die Länge dieses Abstandes  $A^rB^r$  bestimmt. Das Bild, ein Dreieck  $abt$ , hat drei Bestimmungsstücke. Aus  $a = 1, b = 3$  folgt aber  $x = 0$ . Durch das Bild ist das Original, sowie auch seine Stellung zu dem Bilde, bestimmt.

Fig. 89 (S. 155) zeigt, wie das Original bei gegebenem Bilde gefunden wird. In  $A$  ziehe  $b_1$  parallel mit  $b$  und in  $B$  die Parallele  $a_1$  zu  $a$ . In  $A$  sind  $t, a, b_1$  die Bilder dreier rechtwinkliger Axen und es ist das zugehörige Spurendreieck  $S^t, S^a, S^b$  so zu zeichnen, dass  $a, b_1, t$  dessen Höhentransversalen sind. Indem man etwa  $S^t$  in  $t$  zuerst festsetzt, zieht man  $S^tS^a$  senkrecht zu  $b_1$ , u. s. f. Hierbei ist die Lage von  $S^t$  in  $t$  willkürlich, da eine Verschiebung dieses Punktes in  $t$  eine Parallelverschiebung des Objektes in zu der Zeichnungsfläche normaler Richtung bedeutet. — In  $B$  sind ebenso  $t, a_1, b$  die Höhen des Spurendreiecks  $S^a, S^b, S^t$ ; auch dieses Trieder  $t^r, a^r, b^r$  ist durch sein Spurendreieck bestimmt. Die Figur enthält schliesslich noch die Bestimmung von  $A(A) = AA^r, B(B) = BB^r$  und  $(A)(B) = A^rB^r$ .

---

\* Vergl. Schwarz, Crelle's Journal 63, S. 312.





gelassen, also Original und Bild gleich bezeichnet.) Aus einem Punkte  $C_1$  auf der Kante  $ab$  fälle man die Senkrechte  $C_1C'_1$  auf die Fläche  $c$  (diese Vorgänge können an Fig. 91 verfolgt werden.) Aus  $C'_1$  fällt man die Senkrechten  $C'_1A$  auf  $bc$  und  $C'_1B$  auf  $ac$ . Dann sind  $C'_1AC_1$  und  $C'_1BC_1$  die Neigungswinkel der Flächenwinkel  $(cb)$  und  $(ca)$ . Ihre Ebenen mögen mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnet werden. Verlängert man  $BC'_1$  bis  $A_1$  auf  $bc$  und  $AC'_1$  bis  $B_1$  auf  $ac$ , so steht  $A_1B_1$  auf  $SC'_1$  senkrecht. Denn in dem Dreiecke  $SA_1B_1$  ist  $C'_1$  der Höhenschnittpunkt. Die Orthogonalprojektion  $SC'_1$  von  $SC_1$  auf  $c$  schneide  $A_1B_1$  in  $Q$ . Aus  $Q$  fällt man  $QC$  senkrecht auf die Kante  $ab$ . Dann sind  $A_1C$  und  $B_1C$  die Schenkel des in der Ebene  $\gamma$  liegenden Neigungswinkels des Flächenwinkels  $(ba)$ .

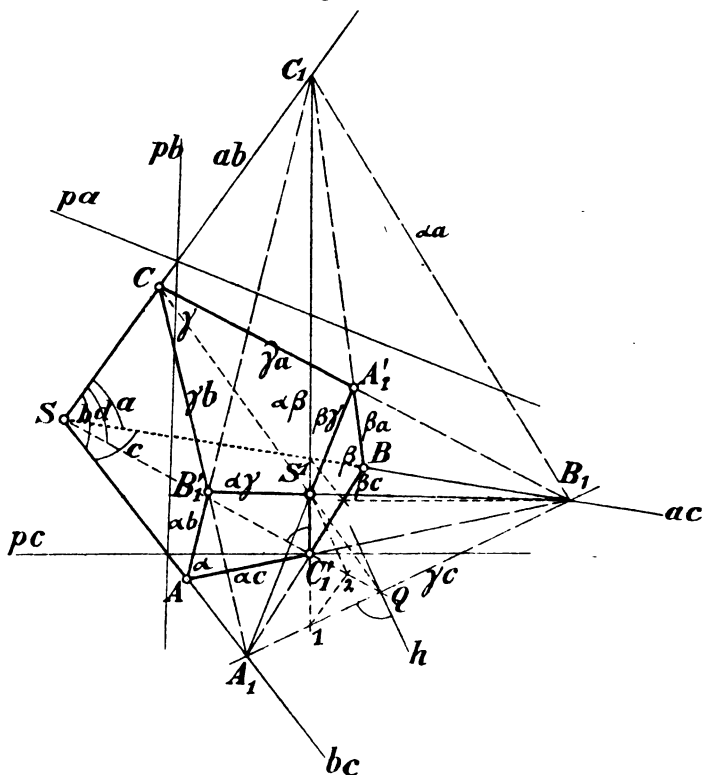
Hier schneiden sich die Neigungswinkelenebenen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  paarweise auf den Kanten der gegebenen Ecke. Die Polarecke, mit den Flächen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und den Kanten  $\alpha\beta$ ,  $\alpha\gamma$ ,  $\beta\gamma$ , wird somit in besonderer Lage vorausgesetzt. (Jede andere Polarecke kann als eine Parallelverschiebung der eben konstruierten hergeleitet werden.) Diese eben beschriebene räumliche Figur hat vier Bestimmungsstücke, nämlich die drei der Ecke  $S.abc$  und etwa die Länge  $SC_1$ .

Das Bild  $ab$ ,  $ac$ ,  $bc$  der Ecke hat zwei Bestimmungsstücke (Nr. 47, c). Man zieht (Fig. 91, S. 158) durch  $S$  das Bild  $SC'_1$  (eine Bedingung) und legt das Bild  $C_1C'_1$  beliebig (zwei Bedingungen). Endlich lässt sich noch  $C'_1A$  willkürlich wählen (eine Bedingung), dann ist das Bild bestimmt. Somit hat das Bild im ganzen sechs Bestimmungsstücke. Aus  $a = 4$ ,  $b = 6$  folgt  $x = 0$ . Durch das Bild muss das Original bestimmt sein, sowie seine Stellung zu dem Bilde.

Zunächst soll das Bild vollständig gezeichnet werden. Gegeben sind die Bilder  $S.ab$ ,  $ac$ ,  $bc$ ,  $C_1$ ,  $C'_1$  und  $C'_1AB_1$ . Die Gerade  $AC'_1B_1$  ist das Bild  $ac$  der Schnittlinie der Ebenen  $\alpha$  und  $c$ . Ebenso sind  $AC_1 = \alpha b$  und  $C_1C'_1 = \alpha\beta$  gegeben. — Weil  $C_1C'_1$  auf der Fläche  $c$  senkrecht steht, so ist sie das Bild einer Falllinie der Ebene  $c$  (in Bezug auf die Zeichnungsfläche als Bildebene  $p$ ). Die in  $C'_1$  auf  $C_1C'_1 = \alpha\beta$  errichtete Senkrechte ist deshalb  $pc$  genannt worden, sie ist die Spur

der Ebene  $c$  in der Bildebene  $p$ . (Selbstverständlicherweise dürfte man irgend eine auf  $C_1C'_1$  Senkrechte als Linie  $pc$  einführen.) — Für die Ebene  $c$  sind nun  $pc, \alpha\beta$  (oder  $C_1C'_1$ ) und  $bc, \alpha c$  die Bilder zweier Rechtwinkelpaare.\* Hierdurch ist

Fig. 91.



die aus  $C'_1$  auf  $ac$  gefällte Senkrechte  $C'_1B$  bestimmt. Die Figur enthält ihre Konstruktion. Man schneidet  $ac$  mit  $\alpha c$ , zieht parallel mit  $pc$ ; darauf schneidet man  $\alpha\beta$  mit  $ac$  und zieht parallel mit  $bc$ . Mit anderen Worten zieht man durch die Schnittpunkte von  $ac$  mit den Geraden  $ac$  und  $\alpha\beta$  je Parallelen zu den gegenüberliegenden Strahlen wie in Nr. 3.

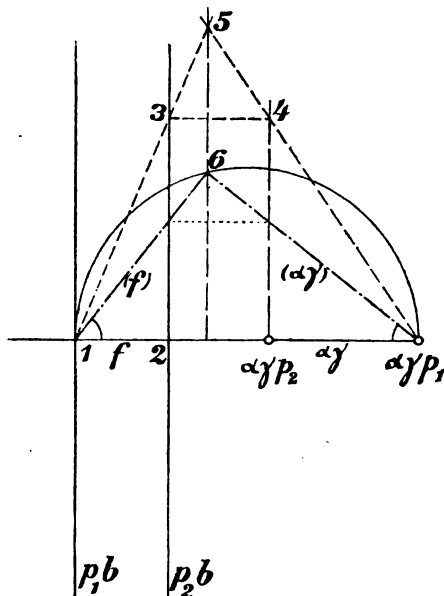
\* An den nämlichen Scheitel verlegt, müssen sich diese Paare trennen (Nr. 2), was bei der Wahl von  $ac$  zu beachten ist.

Diese letzteren schneiden sich auf  $C'_1B = \beta c$ . — Nachdem nun  $\alpha c$  und  $\beta c$  (und auch  $\alpha b$ ,  $\alpha a$ ;  $\beta a$ ,  $\beta b$ ) bekannt sind, verfügt man auch über die Punkte  $A_1$ ,  $B_1$  und über ihre Verbindungslinie  $\gamma c$ , welche  $SC'_1$  in  $Q$  schneidet. Innerhalb der Ebene  $C_1SC'_1$  oder  $d$  soll man aus  $Q$  die Senkrechte  $QC$  auf  $ab$  fallen. Für die Ebene  $d$  ist  $SC'_1$ ,  $C'_1C_1$  das Bild eines Rechtwinkelpaares. Ferner steht  $\gamma c$  auf  $d$  senkrecht. Also ist für die Ebene  $d$  die Gerade  $\gamma c$  das Bild einer Falllinie und die etwa in  $Q$  auf  $\gamma c$  errichtete Senkrechte  $h$  das Bild einer Hauptlinie;  $\gamma c$ ,  $h$  sind die rechtwinkligen gegenüberliegenden Linien des Bildes der Ebene  $d$ . Mit Hilfe dieser Paare  $\gamma c$ ,  $h$ ;  $\alpha\beta$ ,  $SC'_1$  lässt sich die  $ab$  gegenüberliegende Linie  $QC$  auf mehrfache Weise finden. Im Schnitte 1 von  $\alpha\beta$  mit  $\gamma c$  zieht man parallel mit  $ab$  bis nach 2 auf  $SC'_1$ , dann parallel  $h$  bis  $\alpha\beta$ . So entsteht  $S'$  und es ist  $QS'$  das Bild der Senkrechten aus  $Q$  auf  $ab$ . (Fasst man für die Ebene  $d$  die hervorgehobenen gegenüberliegenden Linienpaare ins Auge, so wird man sofort übersehen, dass  $S'1Q$  das Bild eines Dreiecks der Ebene  $d$  und 2 das Bild seines Höhenchnittes ist.) — Nachdem  $QC$  gefunden ist, hat man  $CA_1 = \gamma b$ ,  $CB_1 = \gamma a$ . Weiter schneiden sich  $\gamma a$ ,  $\beta a$  in  $A'_1$  (oder in  $\beta\gamma a$ ) und  $\gamma b$ ,  $\alpha b$  in  $B'_1$  (oder in  $\alpha\gamma b$ ). Die Geraden  $C_1C'_1$ ,  $B_1B'_1$ ,  $A_1A'_1$  oder  $\alpha\beta$ ,  $\alpha\gamma$ ,  $\beta\gamma$  laufen sämtlich durch den Scheitel  $S'$  der Polarecke.

Nachdem so die Konstruktion des Bildes aus sechs Bestimmungsstücken behandelt ist, soll noch angegeben werden, wie das Original gefunden werden kann. Da  $pc$  festgesetzt worden ist, so ist die Lage der Bildebene fixiert. Der Schnitt von  $bc$  mit  $pc$  ist der Spurpunkt der Kante  $bc$  in der Bildebene  $p$ . Da weiter  $bc$ ,  $\alpha\gamma$  die Bilder von zwei sich rechtwinklig kreuzenden Geraden sind,  $AB'_1$  das Bild ihres kürzesten Abstandes ist, so kann man nach Nr. 53 die räumliche Lage von  $bc$ ,  $\alpha\gamma$  und  $AB'_1$  angeben. In derselben Weise verhalten sich  $\alpha\gamma$ ,  $ab$ ,  $CB'_1$  u. s. f. In dieser Weise findet man aus dem Bilde das Original und seine Lage zu dem Bilde. — Die sieben Ebenen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  lassen sich ferner leicht mit  $p$  schneiden. Die Schnittlinie  $pb$  ist senk-

recht zu  $\alpha\gamma$  und es schneiden sich  $pb$ ,  $pc$  auf  $bc$ . Verbindet man die Schnitte von  $pb$  mit  $ab$  und von  $pc$  mit  $ac$ , so entsteht die auf  $\beta\gamma$  senkrechte Linie  $pa$ . Die in  $ab$  liegende Ecke des Dreiseits  $pa$ ,  $pb$ ,  $pc$  mit  $C_1'$  verbunden giebt  $p\alpha$ . Durch  $C_1'$  gehen die auf  $bc$ ,  $ac$  Senkrechten  $p\alpha$ ,  $p\beta$ . Endlich

Fig. 92.



wäre  $p\gamma$  senkrecht auf  $ab$ ;  $p\gamma$  schneidet zudem  $p\beta$  auf  $\beta\gamma$  und  $pa$  auf  $\alpha\gamma$ . — In analoger Weise könnte man die Schnitte der Raumfigur mit anderen Bildebenen verzeichnen, also diejenigen Schnitte der Figur, die sich in wahrer Grösse projizieren. Aus zwei solchen Schnitten findet man die Gestalt des Objectes auf eine neue Weise. Man nimmt die Schnitte  $p_1b$ ,  $p_2b$  der Ebene  $b$  und die Schnittpunkte  $p_1\alpha\gamma$ ,  $p_2\alpha\gamma$  der auf  $b$  senkrechten Linie

$\alpha\gamma$  mit den zwei Bildebenen  $p_1$ ,  $p_2$ . Hieraus ergeben sich die Lagen von  $b$  und von  $\alpha\gamma$  zu den Bildebenen (Fig. 92). Man schneidet  $p_1b$ ,  $p_2b$  mit der darauf Senkrechten  $\alpha\gamma$  in 1, 2, errichtet in 2 und in  $p_2\alpha\gamma$  auf  $\alpha\gamma$  zwei senkrechte Linien von gleicher Länge. Es entstehen die Punkte 3, 4, darauf 5. Die aus 5 auf  $\alpha\gamma$  gezogene Senkrechte schneidet den verzeichneten Halbkreis in 6. Die Linie 61 oder  $(f)$  bildet mit 12 den Neigungswinkel von  $b$  mit den Bildebenen (sie ist eine umgelegte Falllinie der Ebene  $b$ ). Analog bildet  $(\alpha\gamma)$  mit  $\alpha\gamma$  denselben Winkel, wie die räumliche Linie  $\alpha\gamma$  mit den Bildebenen. — Durch dasselbe Verfahren findet man die räumliche Lage der übrigen Ebenen und Kanten.

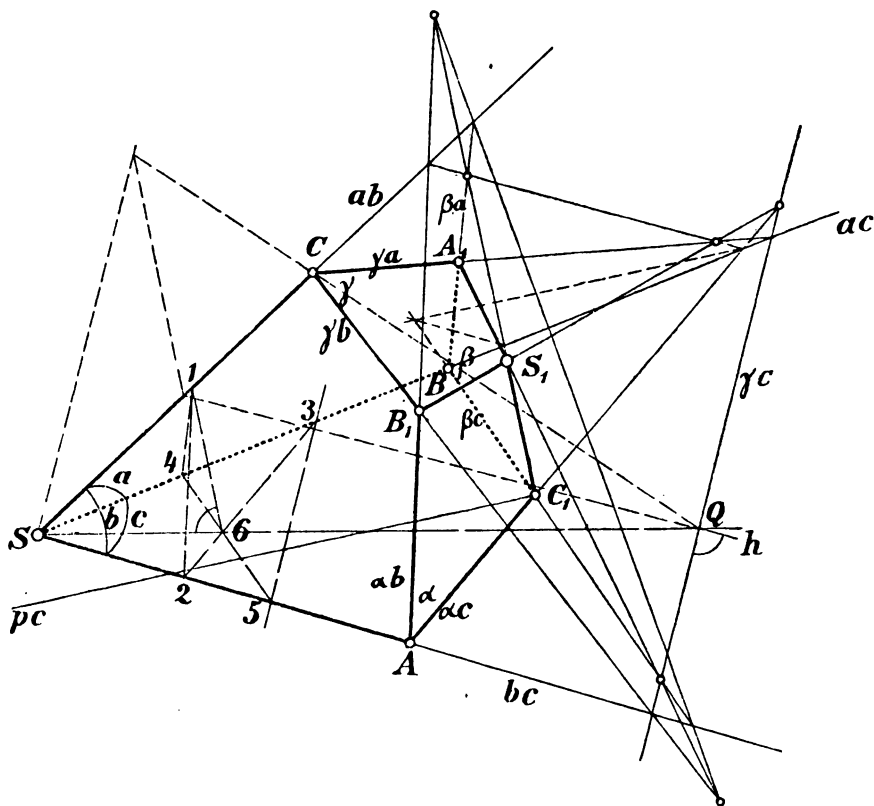


Es soll nun die körperliche Ecke mit ihrer Polarecke in Orthogonalprojektion gezeichnet werden, wenn die gegenseitige Lage dieser Ecken eine beliebige ist. Man denke sich einen Körper  $S^r A^r C_1^r B^r A_1^r C^r B_1^r S_1^r$ , dessen Oberfläche aus sechs Vierecken (ohne rechte Winkel) zusammengesetzt ist und dessen Bild die Gestalt  $SAC_1BA_1CB_1S_1$  (Fig. 93) hat. Dieser Körper ist durch 12 Stücke bestimmt; 6 bestimmen nämlich das Tetraeder  $S^r A^r B^r C^r$  und je zwei Teilverhältnisse die Lage von  $A_1^r, B_1^r, C_1^r$  in den Flächen  $a^r, b^r, c^r$ . Hierdurch sind auch die Ebenen  $A_1^r C^r B_1^r$  etc. und damit der Punkt  $S_1^r$  bestimmt. Das Bild ist als ein Achteck durch 13 Stücke bestimmt, mithin ist  $x = 1$ . Anstatt aber am Objekte über eine Bedingung zu verfügen, darf man festsetzen, dass die sechs (unabhängigen) Winkel  $S^r C^r B_1^r, S^r C^r A_1^r, S^r A^r B_1^r, S^r A^r C_1^r, S^r B^r A_1^r, S^r B^r C_1^r$  rechte seien. Darauf muss das Bild in fünffacher Weise spezialisiert sein und somit aus  $13 - 5 = 8$  Stücken gezeichnet werden können.

Um ein solches Bild zu erhalten, ziehe man (Fig. 93, S. 162)  $ab, ac, bc$  aus  $S$  (2 Bed.). Auf  $bc$  wählt man  $A$  und zieht durch  $A$  die Bilder  $ab, ac$  (3 Bed.). In der Ebene  $\alpha$  verzeichnet man die Gerade  $S_1 C_1$  oder  $\alpha\beta$  (2 Bed.). Für das Bild der Ebene  $c$  ist nun  $C_1 S_1$  eine Falllinie, die dazu Senkrechte  $pc$  eine Hauptlinie und auch  $SA, AC_1$  das Bild eines Rechtwinkelpaares. Mit Hilfe dieser zwei Paare gegenüberliegenden Linien findet man das Bild der aus  $C_1^r$  auf  $a^r c^r$  gefällten Senkrechten. (Im Schnitte von  $S_1 C_1$  mit  $ac$  zieht man eine Parallele zu  $bc$  und aus dem Schnitte von  $AC_1$  mit  $ac$  eine Parallele zu  $pc$ . Der Schnittpunkt der Parallelen liegt auf  $BC_1$ .) Der Fusspunkt  $B$  bestimmt mit  $S_1 C_1 = \alpha\beta$  die Ebene  $\beta$ , es lassen sich  $\beta a$  und  $\beta c$  angeben. — Um  $\gamma$  zu bestimmen verschiebt man die Ebenen  $\alpha, \beta$  nach 123, 145, so dass sie sich nämlich in 1 auf  $ab$  schneiden. Die Linien 23, 45 schneiden sich in 6, dem Bilde der Orthogonalprojektion des Punktes  $1^r$  auf die Fläche  $c^r$ . Ebenso ist  $S6$  das Bild der Projektion von  $a^r b^r$  auf  $c^r$ . Wenn nun die Ebene  $\gamma^r$  senkrecht auf  $a^r b^r$  stehen soll, so muss in  $c^r$  ihre Spur  $\gamma^r c^r$  senkrecht zu der Projektion  $S6^r$  liegen. Da aber die

Linie  $3^r5^r$  bereits diese Richtung hat, so muss das Bild  $\gamma c$  mit  $35$  parallel sein. Man ziehe sie im übrigen beliebig, etwa durch  $Q$  auf  $S6$  (1 Bed.). — Die Gerade  $\gamma c$  repräsentiert hierauf eine Falllinie der Ebene  $CSQ$ , die in  $Q$  auf  $\gamma c$

Fig. 93.



errichtete Senkrechte  $h$  ist das Bild einer Hauptlinie. Für dieselbe Ebene ist auch  $S6, 16$  das Bild eines Rechtwinkel-paares. Man kann somit für diese Ebene das Bild  $QC$  der Senkrechten aus  $Q^r$  auf  $a^rb^r$  konstruieren. (Man schneidet  $ab$  mit  $h$  und  $Q6$  und zieht durch jeden der Schnittpunkte eine Parallele zu der gegenüberliegenden Linie des anderen Schnittpunktes: im Schnitt mit  $h$  eine Parallele zu  $16$  oder

$S_1C_1$  und im Schnitt  $S$  mit  $Q6$  eine Parallele zu  $\gamma c$ . Die zwei so erhaltenen Linien schneiden sich auf  $QC$ .) Durch  $C$  und  $\gamma c$  ist die Ebene  $\gamma$  bestimmt. Zuletzt werden die Schnitte  $\gamma\alpha = B_1S_1$  und  $\gamma\beta = A_1S_1$  verzeichnet. (In Fig. sind von jeder der Ebenen  $\alpha, \beta, \gamma$  das vollständige Spurendreieck bezüglich der Ebenen  $a, b, c$  benutzt, also  $ab, ac, aa$  für  $\alpha$  u. s. f.) Man wird bemerken, dass das Bild aus 8 Stücken konstruiert worden ist. Durch das Bild ist das Original bestimmt, denn auch hier kreuzen sich  $b^rc^r$  und  $a^r\gamma^r$  rechtwinklig, wobei  $A^rB_1^r$  ihr kürzester Abstand ist u. s. f.

---

## Sechster Teil.

### Der Zusammenhang zwischen Objekt, Projektionsrichtung und Bild bei der schiefen Parallelprojektion.

---

55. Hat man ein Objekt durch schiefe Parallelprojektion auf die Ebene  $P$  abzubilden, so darf man die Lage der Projektionsrichtung  $p^r$  zu dem Objekte willkürlich annehmen, was der Verfügung über zwei Bedingungen gleichkommt. Darauf bringt man die Ebene  $P$  in irgend welche bestimmte Lage zu dem Objekte, bezüglich zu  $p^r$ , was neuerdings die Verfügung über zwei Bedingungen bedeutet. In anderer Ausdrucksweise hat man hier (in der unendlich fernen Ebene des Raumes) die Richtung von  $p^r$  und die Stellung von  $P$  unabhängig voneinander (und nicht in vereinigter Lage) zu wählen; bei der Orthogonalprojektion war die Stellung von  $P$  durch die Richtung von  $p^r$ , und umgekehrt, bestimmt. Wenn die Lage des Bildes in der Bildebene gleichgültig ist, so hängt eine bestimmte Parallelprojektion des Raumes von vier wesentlichen Bedingungen ab.

Hat ein abzubildendes Objekt  $o$  Bestimmungsstücke, so hat man für das Objekt und eine bestimmte Abbildung desselben zusammen über  $o + 4$  Bedingungen frei zu verfügen. Das Bild soll durch  $b$  Stücke oder Bedingungen bestimmt sein. Ist das Bild gegeben, so hat man für das Objekt und dessen Lage zu der Projektionsrichtung und zu der Bildebene zusammen über  $x = o + 4 - b$  Bedingungen zu verfügen. — Die Auffassung der projizierenden Linien als Sehstrahlen ist in Nr. 47 auseinandergesetzt. Jene Resultate und einige weitere Betrachtungen gelten hier unverändert.

a) Ein einfaches Beispiel für die Abzählung der Bedingungen bietet das Tetraeder. Das Original  $A'B'C'D'$  ist durch  $o = 6$  Stücke, sein Bild als das Viereck  $ABCD$  ist durch  $b = 5$  Stücke bestimmt. Es folgt  $x = 5$ .\* Soll ein gegebenes Viereck das Bild eines Tetraeders sein, so kann man über 5 unabhängige Stücke des Tetraeders verfügen, darauf sind das Objekt, die Projektionsrichtung und die Lage beider zu dem Bilde bestimmt. Man darf die Originallängen von fünf Kanten geben oder z. B. festsetzen, dass das Original einem gegebenen Tetraeder ähnlich sei (Pohlkescher Satz). — Andererseits lassen sich die fünf Bedingungen auf das Tetraeder und die Projektionsrichtung verteilen. Man kann z. B. die Lage der Projektionsrichtung zu dem Bilde und die Originallängen dreier Kanten, die jedoch nicht in einerlei Fläche liegen dürfen, angeben. In diesem Falle geschieht die Bestimmung des Originals wie in Nr. 47, e).

Soll ein Viereck das Bild eines regulären Tetraeders sein, so findet man  $o = 1$ ,  $b = 5$ ;  $x = 0$ . Ein reguläres Tetraeder ist als ein in fünffacher Weise spezialisiertes zu betrachten ( $o = 1$  gegenüber  $o = 6$ ). In Nr. 62 ist angegeben, wie man bei gegebenem Bilde die Projektionsrichtung und die Grösse des Originals findet.

---

\* Für einen beliebigen Körper von  $e$  Ecken und  $k$  Kanten werden  $o = k$ ,  $b = 2e - 3$ ;  $x = k - 2e + 7$ .

b) Ist das Objekt eine dreiseitige körperliche Ecke vom Scheitel  $S^r$  und den Kanten  $a^r, b^r, c^r$ , so bestehen die Werte  $o = 3, b = 2; x = 5$ .

Kennt man das Bild, das Original und die Stellung der Projektionsrichtung  $p^r$  zu dem letzteren, so kann man die Lage von  $p^r$  in Bezug auf das Bild finden. Zu diesem Zwecke wird man das Original auf eine zu  $p^r$  senkrechte Ebene  $N$  projizieren. Es entsteht ein Büschel  $S'. a' b' c'$  und nun hat man die Ebenen  $N$  und  $P$  in solche Lage zu einander zu bringen, dass  $S'. a' b' c'$  die Orthogonalprojektion des gegebenen Bildes ist (Nr. 50, Anhang). Die auf  $N$  senkrechten Strahlen stimmen mit den projizierenden Linien  $p^r$  überein.

Eine andere Festsetzung über jene fünf Bedingungen bei gegebenem Bilde würde darin bestehen, dass man die Ecke  $S^r. a^r b^r c^r$  wählt und die Stellung von  $p^r$  zu dem Bilde  $S. abc$ . Alsdann sucht man die Stellung von  $p^r$  zu der Originalecke. Die Aufgabe lässt sich auf eine solche über die Orthogonalprojektion zurückführen. Ist nämlich etwa  $S''. a'' b'' c''$  die Orthogonalprojektion des Bildes  $S. abc$  auf eine zu  $p^r$  senkrechte Ebene  $N$ , so hat man die gegebene Ecke so zu legen, dass  $S''. a'' b'' c''$  ihre Orthogonalprojektion wird.

c) Besteht die Originalfigur aus  $n$  Strahlen  $a^r, b^r, c^r, \dots$  eines Büschels vom Scheitel  $P^r$ , so ist das Bild  $P. a, b, c \dots$  ebenfalls ein Büschel. Für  $o = b = n - 1$  liefert hier die Formel  $x = 4$ .

Ist das Bild gegeben, so darf man am Objekte drei Strahlen, beziehungsweise zwei Winkel, annehmen. Die Bestimmung der übrigen geschieht nach Nr. 1, bezüglich Nr. 47, d). Es verbleiben hierauf noch zwei freie Bedingungen für die Projektionsrichtung, deren Lage zu Original oder Bild festgesetzt werden darf. Um endlich die letzte Lagenbeziehung zu finden, führe man eine auf  $p^r$  senkrechte Ebene  $N$  ein, auf welche das Original, bezüglich das Bild, normal projiziert wird; es erübrigt die in Nr. 50, Anhang gegebene Konstruktion anzuwenden.

d) Das Bild eines ebenen Vierecks  $A^r B^r C^r D^r$  ist wieder ein Viereck  $ABCD$ . Da hierbei  $o = b$ , so ist  $x = 4$ .

Ist das Bild bekannt und setzt man fest, dass die zwei Winkel bei  $A'$  und  $C'$  rechte seien, so darf man noch die Lage von  $p'$  zu dem Bilde willkürlich wählen. Es würde so folgen, dass im allgemeinen jedes Viereck die schiefe Parallelprojektion eines Vierecks mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln sein kann und zwar für jede beliebige Lage der Projektionsrichtung (zu dem Bilde). Immerhin muss das Bild so beschaffen sein, dass die an denselben Scheitel verlegten Paare seiner „gegenüberliegenden“ Linienpaare sich trennen (Nr. 2).

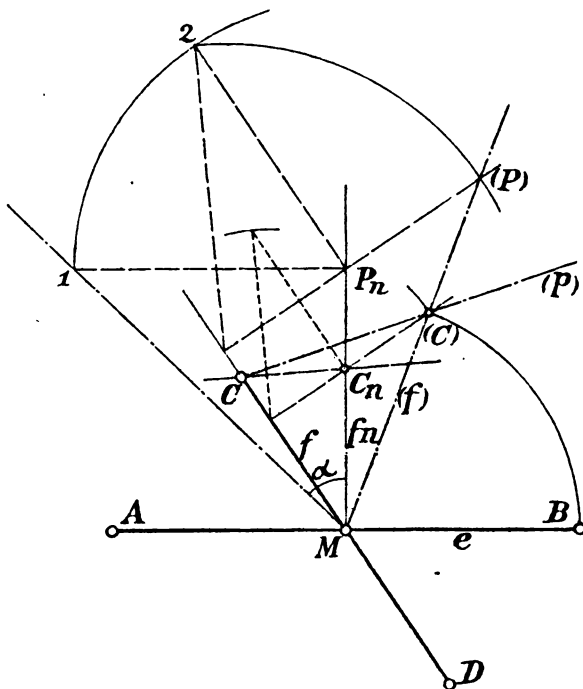
Man verschiebe nun sowohl beim Original als bei dem Bilde die Vierecksseiten so, dass sie je durch einen Punkt gehen. Es folgt in Übereinstimmung mit c), dass man in der Bildebene stets die Bilder der Rechtwinkelpaare (welche durch zwei unter ihnen bestimmt sind) willkürlich festsetzen darf; in jedem Falle lassen sich für jede beliebig gegebene Projektionsrichtung unter sich parallele ebene Systeme finden, welche jene Rechtwinkelpaar-Bilder liefern. — Bei gegebener Projektionsrichtung lässt sich die Bestimmung der Lage der Originalebene wieder auf eine bereits gelöste Aufgabe der Orthogonalprojektion zurückführen; die Originalebene kommt jedesmal in zwei symmetrischen Lagen zu der Projektionsrichtung vor.

**56.** Die Lage der Projektionsrichtung zu einem Kreise als Objekt hängt von nur einer Bedingung ab und es reduziert sich somit die Konstante in der Abzählungsformel um eine Einheit. Diese Formel lautet somit  $x = o + 3 - b$ . Wie bereits angegeben, ist  $b = 2$ ,  $o = 1$ , somit folgt  $x = 2$ . Bei gegebenem Bilde lassen sich der Originalkreis und die Projektionsrichtung nur bestimmen, wenn man über zwei weitere Bedingungen verfügt.

a) Es sei die Lage eines projizierenden Strahles  $p'$  in Bezug auf das Bild gegeben. (Diese Lage hängt von zwei Bedingungen ab.) In diesem Falle lässt sich die Originalebene finden. Die vollständige Bestimmung des Originalkreises ist in Nr. 44 enthalten.

b) Sind das Kreisbild und die Ebene  $E^r$  des Kreises gegeben, so lässt sich die Projektionsrichtung finden. — Da wie immer beliebige Parallelverschiebung der Gebilde in der Projektionsrichtung gestattet ist, so darf man die Spur  $e$  der Ebene  $E^r$  durch das Centrum  $M$  des Kreisbildes legen (Fig. 94).

Fig. 94.



Der in  $e$  fallende Durchmesser sei  $A, B$  und es sei  $C, D$  sein konjugierter. Die Gerade  $CD$  ist das Bild der durch  $M$  gehenden Falllinie  $f^r$  der Ebene  $E^r$ . Die Orthogonalprojektion  $f_n$  von  $f^r$  ist die in  $M$  auf  $AB = e$  errichtete Senkrechte. Da der Winkel  $\alpha$  von  $E^r$  mit  $P$  bekannt ist, so kann man zu irgend einem Punkte  $P^r$  auf  $f^r$ , mit  $P_n$  auf  $f_n$  als Orthogonalprojektion, die Höhe  $P_n 1 = P_n P^r$  angeben. Darauf lässt sich die projizierende Ebene  $f, f^r$  um  $f$  in  $P$  umlegen. Es gelangen  $P^r$  nach  $(P)$ ,  $f^r$  nach  $(f)$ . Aus  $C$  hat man einen

Strahl ( $p$ ) so zu ziehen, dass das auf ( $f$ ) abgeschnittene Stück  $M(C)$  dem Radius  $MB$  des Originalkreises gleich ist. Dieser Strahl ( $p$ ) ist die Umlegung des projizierenden Strahles  $p^r$  des Punktes  $C$ . — Bei der Wiederaufrichtung der Ebene  $ff^r$  gelangt ( $P$ ) um die Strecke  $P_n 2$  vertikal über  $P_n$  nach  $P^r$ ; ( $C$ ) gelangt um eine leicht angebbare Grösse vertikal über  $C_n$  nach  $C^r$ , darauf ist  $CC^r$  die räumliche Lage der Projektionsrichtung. Ihr Winkel mit der Fluchtlinie  $C_n C$  ist der Projektionswinkel  $\varphi$ .

57. Es ist bereits hervorgehoben worden, dass die Teilverhältnisse bei je drei in gerader Linie liegenden Punkten durch Parallelprojektion nicht verändert werden und dass entsprechende Geraden des Originals und des Bildes allemal die Träger ähnlicher Reihen (gebildet aus entsprechenden Punkten) sind (Nr. 1). Ebenso ist die Beziehung, welche zwischen entsprechenden Strahlenbüscheln des Originals und des Bildes besteht, bereits beschrieben worden.

Sind nun  $A, B, C$  die Bilder von drei nicht in Gerader liegenden Punkte  $A^r, B^r, C^r$  eines ebenen Originalsystems  $E^r$ , so lassen sich weitere entsprechende Punktepaare  $P, P^r$  in folgender Weise gewinnen. Schneidet man  $BC$  mit  $AP$  in  $P_1$ , ebenso  $B^r C^r$  mit  $A^r P^r$  in  $P_1^r$ , so stimmen die Teilverhältnisspaare  $BP_1 : CP_1, B^r P_1^r : C^r P_1^r$  und  $AP_1 : P_1 P, A^r P_1^r : P_1^r P^r$  nach Sinn und Grösse überein. Denkt man sich hiernach alle entsprechenden Punktepaare beider Systeme konstruiert, so entstehen nach Nr. 49, S. 138, zwei affine ebene Systeme. Es folgt, dass bezüglich jeder schiefen Parallelprojektion entsprechende ebene Figuren affin sein müssen und dass affine ebene Figuren oder Systeme sich gerade so verhalten wie zwei entsprechende Dreiecke derselben.

Die Frage, ob von zwei affinen Systemen das eine als eine Parallelprojektion des anderen angesehen werden darf, ist damit auf diejenige zurückgeführt, ob von zwei Dreiecken das eine sich so projizieren lässt, dass es das andere zu seiner Projektion hat. Für ein Dreieck und sein Bild bestehen nun



die Werte  $o=b=3$ ,  $x=4$ . Ist das Bild gegeben, so darf also das Original beliebig gewählt und eine Bedingung, die Projektionsrichtung betreffend, gestellt werden. In anderer Ausdrucksweise giebt es der Formel gemäss im allgemeinen unendlich viele Parallelprojektionen, welche ein gegebenes Dreieck (ebenes System) in ein zweites gegebenes Dreieck (ein affines System) überführen. Diese Projektionen sollen nachfolgend bestimmt werden.

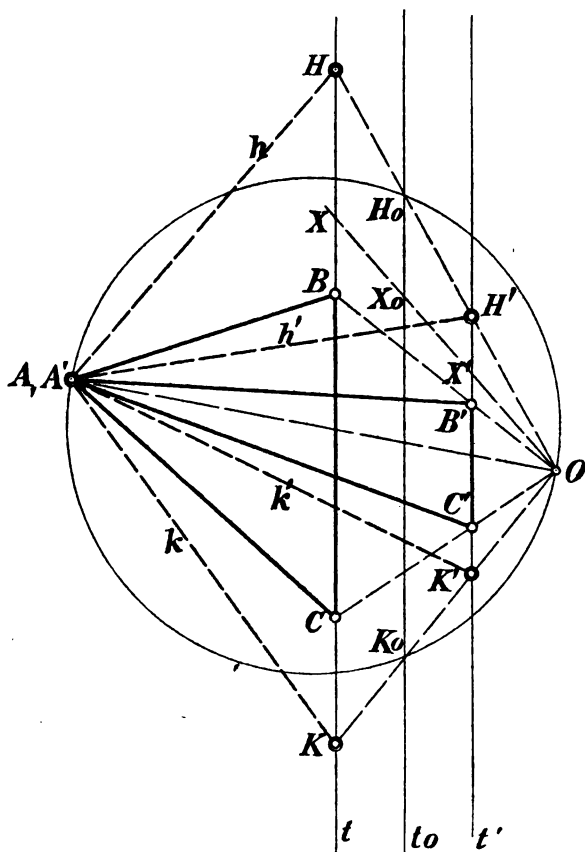
In der Bildebene (Zeichnungsfläche)  $P$  verzeichne man nebst dem Bilde  $ABC$  ein dem Originaldreiecke  $A'B'C'$  kongruentes Dreieck  $A'B'C'$ , wobei  $A'$  auf  $A$  fällt und  $B'C'$  mit  $BC$  parallel ist (Fig. 95, S. 170). Dieses Zusammenlegen ist auf vier Arten ausführbar, indessen führen sie sämtlich zu denselben Resultaten. Ein Punkt  $X$  auf  $BC$  ist das Bild eines solchen Punktes  $X'$  von  $B'C'$ , für welchen  $B'X':C'X'$  mit  $BX:CX$  übereinstimmt. Man wird sofort erkennen, dass hierbei die Verbindungslinie  $XX'$  durch den festen Schnittpunkt  $O$  von  $BB'$  mit  $CC'$  hindurchgeht. Umgekehrt schneidet jeder durch  $O$  gezogene Strahl die Linien  $BC$ ,  $B'C'$  in entsprechenden Punkten. Diese Linien  $BC$  oder  $t$  und  $B'C'$  oder  $t'$  sind die Träger ähnlicher Reihen und da sie in paralleler Lage sind, so haben alle entsprechenden Punktpaare zu Verbindungslinien die Strahlen eines Büschels. Die Verbindungslinien von  $X$  und  $X'$  mit  $A=A'$  sind entsprechende Linien der durch die Dreiecke  $ABC$ ,  $A'B'C'$  bezeichneten affinen Systeme. Zu der Lösung der gestellten Aufgabe bedarf man nun derjenigen entsprechenden Linien (Strecken)  $AX$ ,  $A'X'$ , welche von gleicher Länge sind. Man hat somit solche Punkte  $X$  auf  $BC$ ,  $X'$  auf  $B'C'$  zu suchen, deren Verbindungslinie durch  $O$  geht und deren mittelsenkrechte Linie den Punkt  $A$  enthält. Die Mitte  $X_0$  zwischen  $X$  und  $X'$  liegt nun stets auf der in der Mitte zwischen  $t$  und  $t'$  gezogenen Linie  $t_0$ .\* Soll ferner die mittelsenkrechte Linie von  $XX'$  durch  $A$  gehen, so muss weiterhin

---

\* Die aus  $A$ ,  $A'$  gefälltten Höhen der beiden Dreiecke werden als ungleich vorausgesetzt, was stets erlaubt ist, wenn die Dreiecke nicht kongruent sind.

$X_0$  auf dem über  $AO$  als Durchmesser beschriebenen Kreise liegen. Es giebt also zwei Punkte  $X_0$  von dieser Eigenschaft, sie sind die Schnittpunkte  $H_0$  und  $K_0$  von  $t_0$  mit jenem

Fig. 95.



Kreise. Ihre Verbindungslinien mit  $O$  schneiden  $t, t'$  in  $H, H'; K, K'$  und nun sind  $AH, A'H'; AK, A'K'$  zwei Paare entsprechender Linien aus  $A$  nach  $t$  und aus  $A'$  nach  $t'$  gezogen, welche gleich lang sind. Die Linien  $h = AH, k = AK$  sind die Bilder einer Hauptlinie  $h'$  und einer Linie  $k'$  des ebenen Originalsystems, jedoch in beliebiger Reihenfolge, vergl. Nr. 14. — Dreht man nun das System  $A'B'C'H'$  um  $A' = A$ , bis  $H'$

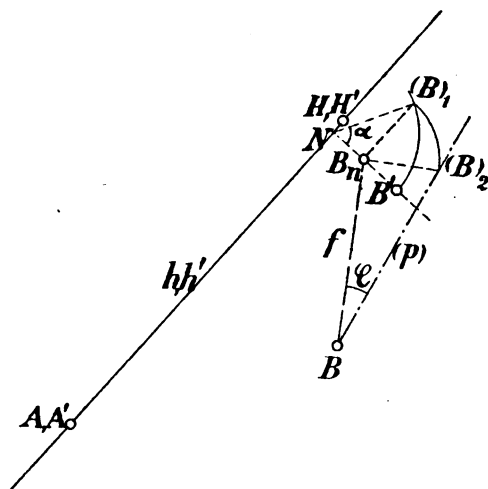
auf  $H$  ( $h'$  auf  $h$ ) fällt, so geben die gedrehten Punkte  $B', C'$  mit  $B, C$  verbunden parallele (Affinitäts-) Strahlen, wegen der Übereinstimmung der Verhältnisse  $HB:HC$  und  $H'B':H'C'$ . — Dreht man ferner das System  $A'B'C'H'K'$  um  $A'$ , bis  $h'$  auf  $h$  ( $K'$  auf  $K$ ) fällt, so gelangen die affinen Systeme ein zweites Mal in centrische Lage. Gegenüber vorhin entstehen neue Affinitätsstrahlen.

Bei den eben ausgeführten Drehungen waren  $ABC$  und die Endlage von  $A'B'C'$  je auf derselben Seite  $h$ , bezüglich von  $k$ . Das rührt davon her, dass die parallelen Reihen  $BC, B'C'$  (oder  $t, t'$ ) gleichen Sinn haben. Hätte man ursprünglich das Dreieck  $A'B'C'$  auf die zweite mögliche Weise so an  $ABC$  gelegt, dass  $A'$  in  $A$  und  $B'C'$  in  $t'$  fällt, so hätten die Reihen  $BC, B'C'$  entgegengesetzten Sinn. Wiederholt man im übrigen die gemachte Konstruktion für diese Zusammenlegung, so werden die Linien  $h, k$  festbleiben. Aber an Stelle des früheren Systems  $A'B'C'H'K'$  tritt das orthogonal-symmetrische desselben in Bezug auf die von  $A'$  nach  $t'$  gefällte Senkrechte als Axe. Nenne man dasselbe  $A'_1B'_1C'_1H'_1K'_1$ . Dreht man es, bis  $H'_1$  auf  $H$  oder  $K'_1$  auf  $K$  fällt, so sind die nunmehrigen Endlagen von  $A'_1B'_1C'_1$  wieder mit  $ABC$  centrisch-affin, liegen aber je auf entgegengesetzter Seite der Axen  $h$  und  $k$ . Die jetzigen Endlagen (als Systeme  $R$ , Nr. 10) liegen mit den früheren (als den Systemen  $Q$ ) je orthogonal-symmetrisch zu  $h$  und  $k$ . In Nr. 15 ist bereits angegeben worden, dass bei dieser im ganzen vierfachen Zusammenlegung der Systeme  $ABC, A'B'C'$  in die centrisch-affine Lage nur zwei Systeme von Affinitätsstrahlen auftreten.

Nachdem so die Dreiecke  $ABC, A'B'C'$  (und damit die durch sie bestimmten affinen Systeme) centrisch-affin gemacht worden sind, lassen sich leicht Parallelprojektionen angeben, bezüglich welcher ein mit  $A'B'C'$  kongruentes Dreieck  $ABC$  zu seinem Bilde hat. Man mache die Dreiecke  $AHB, A'H'B'$ , (Fig. 96, S. 172) mit den gleichbezeichneten Dreiecken in Fig. 95 kongruent.  $AHB$  repräsentiert das Bildsystem,  $A'H'B'$  das um  $h = h'$  als Spur umgelegte Originalsystem. Dreht man das letztere System aus seiner jetzigen Lage um  $h$  als Axe und

um einen beliebigen Winkel  $\alpha$ , so gelangt  $B'$  nach  $B^r$ , um die Strecke  $B_n(B)_1$  vertikal über  $B_n$ . Die Verbindungslinie  $BB^r$  ist die Projektionsrichtung, welche, um  $B_nB$  umgelegt, nach  $B(B)_2 = (p)$  fällt. Der Winkel  $(B)_2BB_n$  ist gleich dem Projektionswinkel  $\varphi$  und  $B_nB$  oder  $f$  ist die Fluchtlinie des Punktes  $B^r$ . (Zu gegebener Richtung  $f$  giebt die Figur sofort

Fig. 96.



$\varphi$  und  $\alpha$  — die Lage der Projektionsrichtung und der Originalebene —, zu gegebenem Winkel  $\varphi$  giebt es höchstens vier Lagen für  $B^r$  und  $B_n$ , u. s. f.). — Ersetzt man in der voranstehenden Betrachtung die Punkte  $B$  und  $B'$  durch  $C$  und  $C'$ , so findet man wegen  $HB:HC = H'B':H'C'$  wieder denselben Zusammenhang zwischen

den Lagen von der Originalebene und der Projektionsrichtung zu dem Bilde.

a) Bisher ist angenommen worden, es schneide in Fig. 95 der Hilfskreis über dem Durchmesser  $AO$  die Linie  $t_0$  in zwei Punkten. Ist dieses der Fall, so enthalten die affinen Systeme  $ABC\dots$  und  $A^rB^rC^r\dots$  zwei Systeme paralleler entsprechender Linien  $h, k; h^r, k^r$ , deren entsprechende Punktreihen gleich sind. Legt man die Ebenen der beiden Systeme unter beliebigem Neigungswinkel so aneinander, dass in zwei entsprechenden Linien  $h, h^r$  oder  $k, k^r$  alle entsprechenden Punkte sich decken, so sind die Verbindungsstrahlen  $AA^r, BB^r\dots$  aller entsprechenden Punkte der beiden Systeme parallel; jedes der affinen Systeme ist eine Parallelprojektion des anderen. — Geschieht dieses Zusammenlegen in derselben Ebene ( $\alpha = 0$ ),

so entstehen centrisch-affine Systeme. Die Systeme können hier auf vier wesentlich verschiedene Arten centrisch-affin gemacht werden.

b) Wird in Fig. 95  $t_0$  von dem Hilfskreise nicht geschnitten, so haben die beiden Systeme keine entsprechend gleichen Reihen und es kann keines eine Parallelprojektion des anderen sein. Auch können in diesem Falle die Systeme nicht centrisch-affin gemacht werden. — Dieser Fall wird in der Regel dann eintreten, wenn von den Dreiecken  $ABC$ ,  $A'B'C'$  das eine sehr gross, das andere sehr klein ist. Namentlich aber tritt er stets ein für zwei ähnliche Systeme. (In diesem Spezialfalle der Affinität fallen in Fig. 95  $O$  nach  $A$ ,  $B'$  in  $AB$  und  $C'$  in  $AC$ ; der Hilfskreis hat den Radius 0, u. s. f.)

c) Zwischen Schneiden und Nichtschneiden des Hilfskreises und  $t_0$  tritt als Übergangsfall derjenige der Berührung ein. Die Linien  $h, k$ ;  $h', k'$  fallen zusammen. Die beiden Systeme der mit  $h, k$  parallelen Linien des Systems  $ABC...$  bilden eine vereinigte Schar, desgleichen die mit  $h', k'$  parallelen jenen entsprechenden Linien im Systeme  $A'B'C'...$  In jedem Systeme giebt es noch eine einzige Schar von Affinitätsachsen. Beide Systeme lassen sich noch auf zwei Arten zu centrisch-affinen Systemen zusammenlegen.

Die Erzeugung affiner Systeme mit Hilfe von Parallelprojektionen soll im Anschluss an die eben gemachte Einteilung affiner Systeme in drei Klassen des näheren auseinanderzusetzen werden.

Für zwei Systeme der Klasse a) bilden die entsprechend gleichen Reihen von den Trägern  $h, k$ ;  $h', k'$  je zwei getrennte Scharen. Für den Fall, dass die von den  $h$  und  $k$ , ferner von den  $h'$  und  $k'$  gebildeten Winkel ungleich sind, lassen sich die Systeme wie in Nr. 15 mit Fig. 26—28 auf vier Arten (etwa in der Ebene  $P$  des einen Systems) als centrisch-affine Figuren zusammenlegen. Fig. 28 zeigt, dass im Falle der Ungleichheit der Winkel  $(h, k)$ ,  $(h', k')$  von den beiden Scharen von Affinitätsstrahlen keine auf der Affinitätsaxe senkrecht stehen kann. Man fasse nun eine solche centrische Affinität, etwa  $h, k$ ;  $h'_1, k'_1$  mit  $h = h'_1$  als Axe, näher ins Auge. Man drehe

das System  $h'_1, k'_1$  um  $h'_1$ . Der Punkt  $C'_1$ , der dem Punkte  $C$  auf  $k$  entspricht, beschreibt einen Kreis. Der Punkt  $C$  liegt ausserhalb der Ebene dieses Kreises, die ja auf  $h$  senkrecht steht, weil nach dem Vorigen  $CC'_1$  nicht auf  $h$  senkrecht stehen darf. Jede Lage von  $C'_1$ , bezüglich  $C'_1$ , auf jenem Kreise, bestimmt mit  $h$  die Originalebene in ihrer Lage zu der Bildebene. Dabei ist  $CC'_1$  die Projektionsrichtung. Es folgt, dass diese Projektionsrichtung niemals auf der Spurlinie  $h = h'_1$  senkrecht stehen darf. Noch weniger giebt es somit unter diesen Projektionen, mit  $h = h'_1$  als Spurlinie, eine Orthogonalprojektion. — Die centrisch-affinen Systeme  $h, k; h'_2, k'_2$  führen auf die nämlichen Projektionen, bezüglich deren die beiden affinen Systeme als Original- und Bildsystem auftreten. — Endlich liefern die centrisch-affinen Systeme  $h, k; h'_3, k'_3$  und  $h, k; h'_4, k'_4$  mit  $k = k'_{3,4}$  als gemeinsamer Axe eine zweite Schar solcher Parallelprojektionen, in denen die affinen Systeme als Original und Bild vorkommen und von denen ebenfalls alle so beschaffen sind, dass die Projektionsstrahlen und die Spurlinie sich niemals rechtwinklig kreuzen. (Ausgezeichnet sind hierbei nur diejenigen Projektionen, für welche die Fluchtlinien mit der Spur parallel sind.) — In der bisherigen Behandlung der Klasse a) ist angenommen worden, dass die von den Linien  $h$  und  $k$  und die von  $h'$  mit  $k'$  gebildeten Winkel ungleich seien. Wären diese Winkel aber gleich, so müssten nach Nr. 15 die Systeme kongruent sein. Dieser besondere Fall soll später erörtert werden.

Zwei affine Systeme der Klasse b) besitzen keine entsprechend gleichen Reihen. Daher kann keines der beiden als eine Parallelprojektion des anderen dargestellt werden. — In diese Klasse gehören namentlich die ähnlichen, jedoch nicht kongruenten Systeme. — Zwei entsprechende Geraden  $t, t'$  beider Systeme sind die Träger ähnlicher Reihen, gebildet aus entsprechenden Punkten. Durch ähnliche Vergrösserung des einen Systems kann man erreichen, dass diese zwei entsprechenden Reihen gleich werden. Legt man hierauf die neuen Systeme so aneinander, dass die entsprechenden Punkte

dieser Reihen sich decken, so sind die Verbindungslinien aller übrigen entsprechenden Punktepaaire parallel. Liegen hierbei diese Systeme in zwei verschiedenen Ebenen, so ist jedes eine Parallelprojektion des anderen; liegen sie in einerlei Ebene, so sind sie centrisch-affin. — Es seien  $E, E'$  die gegebenen affinen Systeme der Klasse b)  $t, t'$  zwei entsprechende Reihen derselben. Durch ähnliche Vergrößerung des Systems  $E'$  entstehe das neue System  $E''$ ; dabei gehe  $t'$  in  $t''$  über, wobei nun die Geraden  $t, t''$  die Träger entsprechend gleicher Reihen der Systeme  $E$  und  $E''$  sind. Hierauf werden  $E, E''$  notwendig entweder der Klasse a) oder der Klasse c) angehören, oder endlich kongruente Systeme sein. Ob der erste oder der zweite dieser Fälle eintritt, hängt von der Wahl  $t, t'$  ab, wie bald gezeigt werden soll\*. Der dritte Fall tritt nur ein, wenn die ursprünglichen Systeme ähnlich sind.

Wenn die zwei gegebenen affinen Systeme der Klasse c) angehören, so fallen ihre Linien  $h, k; h', k'$  je zusammen. Währenddem in dem allgemeineren Falle, mit welchem diese Linien je verschieden sind (vergl. Nr. 15, Fig. 28), die Winkelhalbierenden der Linien  $h, k$  den Winkelhalbierenden von  $h', k'$  als die ausgezeichneten Linien  $i, i_1; i', i'_1$  entsprechen, fallen hier einerseits  $h, k$  mit  $i_1$ , anderseits  $h', k'$  mit  $i'_1$  zusammen. Ferner sind  $i$  auf  $h = k = i_1$  und  $i'$  auf  $h' = k' = i'_1$  senkrecht. Da somit die auf den Trägern der gleichen entsprechenden Reihen errichteten Senkrechten sich paarweise entsprechen, so kann bei dem Aneinanderlegen der beiden Systeme, bei welchem zwei gleiche Reihen zur Deckung gelangen, nur der Fall eintreten, dass die Verbindungslinie aller entsprechenden Punktepaaire die Axe rechtwinklig kreuzen oder schneiden. Zwei solche Systeme speziellen Charakters sollen normal-affin genannt werden.

Es seien  $h$  und  $h'$  die „Axen“ der beiden normal-affinen Systeme, ferner  $P$  und  $P'$  zwei entsprechende Punkte. Aus

\*  $E, E''$  sind affine Systeme der Klasse c), wenn  $t, t', t''$  mit  $i, i', i''$  oder mit  $i_1, i'_1, i''_1$  zusammenfallen, mit anderen Worten, wenn diese entsprechenden Linien  $t, t', t''$  auf ihren gegenüberliegenden senkrecht stehen.

$P, P'$  fälle man auf  $h, h'$  die Senkrechten  $PP_0, P'P'_0$ . Ihre Fusspunkte  $P_0, P'_0$  in  $h, h'$  sind entsprechende Punkte. Legt man die beiden Systeme in einer Ebene mit den entsprechenden Punkten ihrer Axen aneinander, so liegen  $P$  und  $P'$  auf einer Senkrechten zu dieser Axe. Es sei  $PP_0$  grösser als  $P'P'_0$ . Bei der Drehung des Systems  $h'P'$  um  $h'$  beschreibt  $P'$  einen Kreis und es liegt  $P$  in der Ebene des Kreises, jedoch ausserhalb desselben. Während für jede Lage  $P'$  des Punktes  $P'$  der Projektionsstrahl  $PP'$ , die Spurlinie  $h = h'$  rechtwinklig kreuzt, kann derselbe niemals auf der Ebene  $E$  oder  $hP$  senkrecht stehen. In zwei symmetrischen Lagen von  $E'$  zu  $E$  (Ebene  $hP$ ) aber sind die Projektionsstrahlen auf  $E'$  senkrecht. Es kann also nur das System  $E'$  oder  $h'P'$  eine Orthogonalprojektion des Systems  $E$  oder  $hP$  sein, nicht aber umgekehrt. Wäre  $PP_0$  kleiner als  $P'P'_0$  vorausgesetzt worden, so würde der umgekehrte Fall eintreten. Wären endlich  $PP_0$  und  $P'P'_0$  gleich lang, so wären die zwei Systeme kongruent.

Über die drei Klassen affiner Systeme mag noch folgende Betrachtung angestellt werden. Angenommen, die Systeme besitzen unter ihren entsprechenden ähnlichen Reihen zwei entsprechend gleiche,  $t$  und  $t'$ . Man lege die Systeme  $E$  und  $E'$  in derselben Ebene so aneinander, dass die entsprechenden Punkte in  $t$  und  $t'$  aufeinanderfallen. Darauf seien  $P$  und  $P'$  zwei entsprechende Punkte ausserhalb dieser „Axe“  $t = t'$ . Die Systeme sind nun centrisch-affin (nach Nr. 49). Es wird im allgemeinen (nach diesem Zusammenlegen) der Affinitätsstrahl  $PP'$  zu der Axe  $t, t'$  geneigt sein. Dann schneidet die Mittelsenkrechte der Strecke  $PP'$  die Axe in einem im Endlichen gelegenen Punkte  $L = L'$ . Die Strahlen  $PL, P'L'$  sind entsprechende von gleicher Länge (dasselbe gilt für die zu ihnen parallelen, die sich auf  $t$  schneiden). Es seien ferner  $M = M'$  und  $N = N'$  zwei auf  $t = t'$  nahe bei  $L$ , jedoch auf entgegengesetzter Seite von  $L$  aus, gelegene Punkte. Wenn  $MP < M'P'$ , so ist  $NP > N'P'$  und umgekehrt. Im übrigen sind diese Strahlen  $MP$  und  $M'P'$ , ferner  $NP$  und  $N'P'$  je entsprechende. Es folgt so, dass



bei zwei affinen Systemen der Klasse a), denn um solche handelt es sich hier, in jedem derselben Strecken vorkommen, die bezüglich kleiner, gleich und grösser sind, wie ihre entsprechenden Strecken des anderen Systems. — Wenn aber oben der Punkt  $L$  unendlich fern liegt, so sind die aus  $P$  nach  $t = t'$  gezogenen Linien entweder sämtlich grösser oder sämtlich kleiner als

ihre entsprechenden, welche  $P'$  mit denselben Punkten von  $t = t'$  verbinden. Die Linie  $PP'$  ist jetzt senkrecht auf  $t = t'$ .

Es giebt nur ein System entsprechend gleicher Reihen. Dieser Fall tritt für zwei Systeme der Klasse c) ein; in dem einen der beiden giebt es Strecken, welche

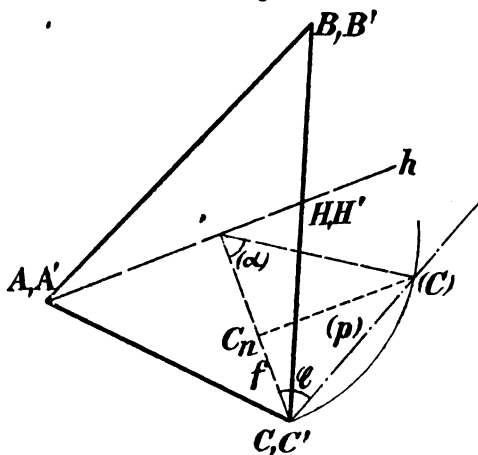
sämtlich kleiner und höchstens gleich sind wie ihre entsprechenden Strecken des zweiten und die Strecken des zweiten Systems sind alsdann sämtlich grösser, höchstens gleich ihren entsprechenden des ersten Systems.

Handelt es sich endlich um zwei affine Systeme der Klasse b), so sind offenbar alle Strecken des einen Systems grösser als ihre entsprechenden im anderen System. Gleichheit entsprechender Strecken tritt nicht ein.

Die ähnlichen und die kongruenten Systeme teilen mit den affinen Systemen die Fundamentealeigenschaften, die sich auf die Gleichheit der Teilverhältnisse beziehen. Sie sind Spezialfälle affiner Systeme.

Nimmt man, analog Fig. 95, zwei entsprechende Dreiecke zweier kongruenten Systeme, so sind dieselben ebenfalls kongruent und gelangen bei der einen Zusammenlegung zur Deckung (Fig. 97). Gegenüber Fig. 95 fallen hier  $t, t' t_0$  zu-

Fig. 97.



sammen und es werden die Elemente  $h, k$  unbestimmt. Jede durch  $A = A'$  gezogene Gerade kann als vereinigte Linie  $h = h'$ ,  $AH = A'H'$  betrachtet werden. Führt man eine solche beliebige Linie als Axe ein, so dreht man das System  $A'B'C'$  um dieselbe und um den beliebigen Winkel  $\alpha'$ . Dabei geht  $A'B'C'$  in  $A^rB^rC^r$  über. Dieses Dreieck hat  $ABC$  zu seiner Parallelprojektion. Die Projektionsrichtung  $p^r$  oder  $CC^r$  etc. steht hier auf der Halbierungsebene des Flächenwinkels  $\alpha'$  senkrecht. Nur für  $\alpha' = 0$  fallen Originalebene und Bildebene zusammen und ist die Projektionsrichtung unbestimmt. Es giebt also zweifach unendlich viele Parallelprojektionen, durch welche ein ebenes System als ein kongruentes System projiziert wird; die Ebenen beider Systeme liegen stets zu der Projektionsrichtung symmetrisch. Bringt man die Systeme zur Deckung, so ist die Projektionsrichtung unbestimmt. — Wählt man als Spur die unendlich ferne Gerade der Ebene  $ABC$ , so werden die Ebenen  $E(ABC)$  und  $E^r(A^rB^rC^r)$  parallel. So oft umgekehrt die kongruenten Systeme  $ABC$ ,  $A^rB^rC^r$  im Raume in parallele Lage gebracht werden, ist allemal jedes eine Projektion des anderen. So entstehen wieder zweifach unendlich viele Projektionen, welche das eine System in das andere überführen. Unter ihnen kommt eine Orthogonalprojektion vor. (Bei dieser Darstellung sind überall Parallelverschiebungen der Systeme in der Projektionsrichtung als gleichgiltig angesehen worden.)

Für irgend eine dieser Projektionen sei  $E$  die Bildebene,  $E^r$  die Originalebene und  $p^r$  die Projektionsrichtung. Hat darauf  $p^r$  eine beliebige Lage zu  $E$ , so liegen  $E^r$  und  $E$  zu  $p^r$  symmetrisch oder es ist  $E^r$  mit  $E$  parallel; für gegebenes  $p^r$  sind somit zwei Lagen der Ebene  $E^r$  möglich. Ist  $E^r$  in beliebiger Lage gegeben, so ist  $p^r$  zweideutig bestimmt; wäre aber  $E^r$  als parallele Ebene von  $E$  gegeben, so wäre  $p^r$  gänzlich unbestimmt.

Wenn die zwei Systeme ähnlich sind, so giebt es keine Parallelprojektionen, welche das eine als Projektion des anderen entstehen lassen.

Wenn zwei affine Systeme  $E, E'$  weder ähnlich noch kongruent sind, so liegt das Verhältnis zweier entsprechenden Strecken  $AB : A'B'$  zwischen zwei extremen Werten. Um dieselben zu erhalten, verzeichne man in  $E'$  die Ellipse, welche einem Kreise des Systems  $E$  entspricht. Die Verhältnisse der Halbaxen dieser Ellipse zu dem Radius jenes Kreises sind eben diese extremen Werte. (Vertauscht man hier die Systeme  $E, E'$  miteinander, so findet man, dass die Ellipsen beider Systeme, welche den Kreisen der anderen Systeme entsprechen, ähnlich sind.) Dass in der That einem Kreise des einen Systems eine Ellipse (als Kreisbild) im anderen entspricht, geht daraus hervor, dass jedes System einer bestimmten Orthogonalprojektion des anderen ähnlich ist (Nr. 50); die Kreisbilder bei der schiefen Projektion sind somit von denen bei der Orthogonalprojektion nicht wesentlich verschieden. — Die extremen Werte der Verhältnisse entsprechender Strecken treten auf, wenn die Strecken in den ausgezeichneten Linien  $i, i_1$  bezüglich  $i', i'_1$  liegen.

58. Über zwei affine ebene Systeme lassen sich im Anschlusse an vorige Nummer eine Reihe von Fragen beantworten. Es mögen diesbezüglich folgende Betrachtungen angestellt werden.

Wenn zwei Systeme  $E, E'$  affin sind, so sind auch irgend zwei damit ähnliche  $E_1, E'_1$  affin. Dabei können die beiden Paare affiner Systeme verschiedenen Klassen angehören, wie aus nachfolgendem hervorgeht.

Zwei entsprechende Geraden  $g, g'$  irgend zwei affiner Systeme  $E, E'$  sind die Träger ähnlicher Reihen  $GG_1G_2\dots, G'G'_1G'_2\dots$  entsprechender Punkte. Die Verhältnisse  $GG_1 : GG_2 : \dots$  und  $G'G'_1 : G'G'_2 : \dots$  stimmen überein. Es entsteht nun die Frage, wie viele entsprechende Linienpaare  $g, g'; l, l' \dots$  in beiden Systemen vorkommen, für welche die entsprechenden Strecken  $GG_1 : G'G'_1, LL_1 : L'L'_1 \dots$  je in demselben Verhältnisse  $m : m'$  zu einander stehen. Vergrößert man das System  $E'$  ähnlich mit sich selbst, bis die entsprechenden Reihen  $g$  von  $E$  und  $g''$  des vergrößerten Systems

$E''$  gleich sind, so findet man in bekannter Weise noch zwei gleiche entsprechende Linien  $l, l''$ , wobei jedoch auch  $l$  mit  $g$  und  $l''$  mit  $g''$  zusammenfallen können. Hierbei sind die Halbierungslinien der Winkel  $(g, l)$  und  $(g'', l'')$  entsprechende Linienpaare  $i, i_1; i'', i_1''$  in rechtwinkliger Lage.\* Geht man von  $E''$  auf das System  $E'$  zurück, so findet man, dass es in jedem von zwei affinen Systemen je zwei Scharen von parallelen Linien giebt, deren entsprechende Strecken in demselben Verhältnisse zu einander stehen. Sie bilden mit den zwei Linien  $i, i_1$  bezüglich  $i', i_1'$  gleiche Winkel. Sind letztere Winkel Null, so vereinigen sich in jedem Systeme beide Scharen. Es folgt, weil jene entsprechenden rechtwinkligen Linien  $i, i_1$  stets vorhanden sind, dass man durch ähnliche Vergrößerungen zwei affine Systeme einer der drei Klassen in solche jeder anderen Klasse überführen kann. (Um zwei Systeme der Klasse a) oder der Klasse b) in solche der Klasse c) überzuführen, hat man sie so zu vergrößern, dass die entsprechenden Strecken der Träger  $i$  und  $i'$  oder  $i_1$  und  $i_1'$  gleich lang sind.)

Wenn die Strecken der zwei Linien  $g, l$  des Systems  $E$  zu den entsprechenden Strecken auf  $g', l'$  des Systems  $E'$  in demselben Verhältnisse  $m : m'$  stehen,\*\* so betrachte man  $g, l$  in  $E$ ,  $g', l'$  in  $E'$  als Axen schiefwinkliger Parallel-Koordinatensysteme. Entsprechende Punkte der affinen Systeme haben alsdann Koordinaten, die sich verhalten wie  $m : m'$ . Die Formeln  $x' = \lambda \cdot x$ ,  $y' = \lambda \cdot y$  vermitteln somit den Übergang von einem System zu einem affinen in allgemeinsten Form, wenn nur die beiden Koordinatensysteme  $x, y$  und  $x', y'$  beliebige Koordinatenwinkel besitzen. — Sollen beide Systeme der Klasse a) angehören, so genügen die Formeln  $x' = x$ ,  $y' = y$ , wenn nur im allgemeinen die Koordinatenwinkel verschieden sind. (Die Gleichheit der Koordinaten-

\* Diese „rechtwinkligen gegenüberliegenden Linien“ der beiden Systeme sind stets vorhanden, für ähnliche Systeme werden sie unbestimmt.

\*\* Vergl. S. 186.

winkel bedeutet hier Kongruenz der Systeme; in dem oben angegebenen allgemeinsten Falle bedeutet die Gleichheit dieser Winkel, Ähnlichkeit der Systeme.) — Für zwei Systeme der Klasse c) genügen die Formeln  $x' = x$ ,  $y' = \lambda \cdot y$ , wenn beide Koordinatensysteme rechtwinklig sind. — Endlich geben auch die Formeln  $x' = \lambda x$ ,  $y' = \mu y$  den Übergang zu einem affinen System in allgemeiner Form, wenn beide Koordinatensysteme rechtwinklige sind. (Sind diesfalls  $\lambda$ ,  $\mu$  beide grösser oder kleiner als 1, so entstehen Systeme der Klasse b); ist nur eine dieser Grössen gleich 1, so gehören die Systeme der Klasse c) an. Für zwei Systeme der Klasse a) ist die eine der Grössen  $\lambda$ ,  $\mu$  grösser, die andere kleiner als 1;  $\lambda = \mu$  bedeutet Ähnlichkeit und  $\lambda = \mu = 1$  den Fall der Kongruenz.)

Systeme, welche mit irgend zwei affinen Systemen ähnlich sind, können centrisch-affin sein. Für die ersteren, also auch für die letzteren, besteht somit die Proportionalität aller entsprechenden Flächen.

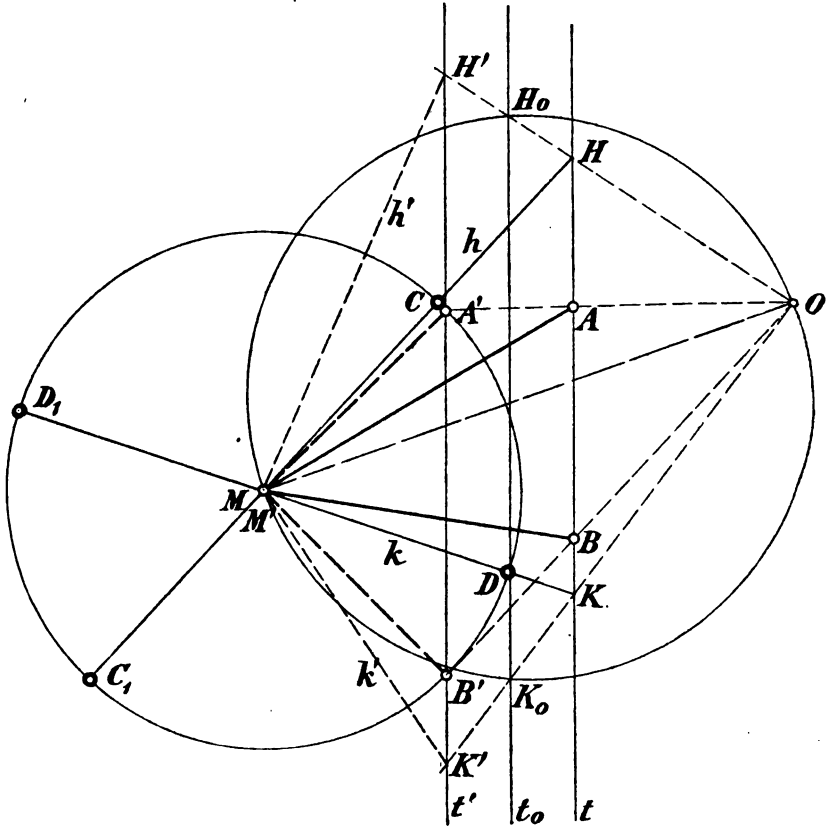
— Ein ebenes System und irgend eine Parallelprojektion desselben sind im allgemeinen affine Systeme der Klasse a). Daraus folgt u. a., dass ein Kreisbild stets Durchmesser hat, die grösser, gleich oder kleiner sind wie der Kreisdurchmesser. Ein um den Mittelpunkt des Kreisbildes beschriebener, mit dem Originalkreise gleicher Kreis muss das Kreisbild stets in vier reellen Punkten (den Endpunkten zweier Durchmesser) schneiden. (Die Projektionen, bei welchen die Projektionsrichtung und die Spur sich rechtwinklig kreuzen, bilden hier die Ausnahme.) Hiervon wird nachfolgend Gebrauch gemacht.

Ein Kreis von gegebenem Radius  $r$  habe in  $M$  das Bild des Mittelpunktes und es seien  $MA$ ,  $MB$  zwei konjugierte Halbmesser des Bildes. Darauf lässt sich die Ebene des Kreises so bestimmen, dass sie mit der Bildebene einen gegebenen Winkel bildet, auch kann die Projektionsrichtung angegeben werden.

Die Gestalt des Originaldreiecks  $M'A'B'$ , dessen Bild  $MAB$  in Fig. 98 (S. 182) gegeben ist, ist bekannt. Es ist bei  $M'$  rechtwinklig und seine Katheten  $M'A'$ ,  $M'B'$  sind gleich  $r$ . Ein mit diesem kongruentes Dreieck  $M'A'B'$  wird so an  $MAB$

gelegt, dass  $M'$  auf  $M$  fällt und  $A'B'$  mit  $AB$  parallel liegt. Wie in Fig. 95 sind die Linien  $h, k$  konstruiert, welche mit ihren entsprechenden von gleicher Länge sind. Jede von

Fig. 98.



ihnen lässt sich als Hauptlinie, beziehungsweise als Spur der Originalebene betrachten. — Ist  $h$  die Spur, so mache man  $MC = MC_1 = r$ . Die Punkte  $C, C_1$  liegen auf dem Kreisbilde. Dreht man den über  $CC_1$  als Durchmesser beschriebenen Kreis um  $h$  und um den beliebigen Winkel  $\alpha'$ , so entsteht der Originalkreis in seiner richtigen Lage zu dem Bilde. Dreht man das System  $h', A', B'$  um  $M'$ , bis  $H'$  auf  $H$  fällt, so

mögen  $A', B'$  nach  $A'_1, B'_1$  (sämtlich auf dem Kreise  $A'B'CC_1$  liegend) gelangen. Bei der Drehung von  $h, A'_1, B'_1$  um  $h$  und um den Winkel  $\alpha'$  mögen  $A''_1, B''_1$  die Endlagen von  $A'_1, B'_1$  sein. Darauf bedeuten die parallelen Strahlen  $AA''_1, BB''_1$  die schliessliche Projektionsrichtung. — Soll aber  $k$  die Spur sein, so haben Originalkreis und Bild die beiden Punkte  $D, D_1$  auf  $k$ , welche von  $M$  den Abstand  $r$  haben, gemein. Dreht man das System  $k', B', A'$  um  $M'$ , bis  $K'$  nach  $K$  gelangt, so sollen  $B''_2, A''_2$  die Endlagen von  $B', A'$  sein. Darauf drehe man noch  $k, B''_2, A''_2$  um  $k$  und um den Winkel  $\alpha'$  nach  $k, B''_3, A''_3$ . Dann sind  $B''_3B$  und  $A''_3A$  projizierende (parallele) Linien und  $kB''_3A''_3$  die Originalebene.

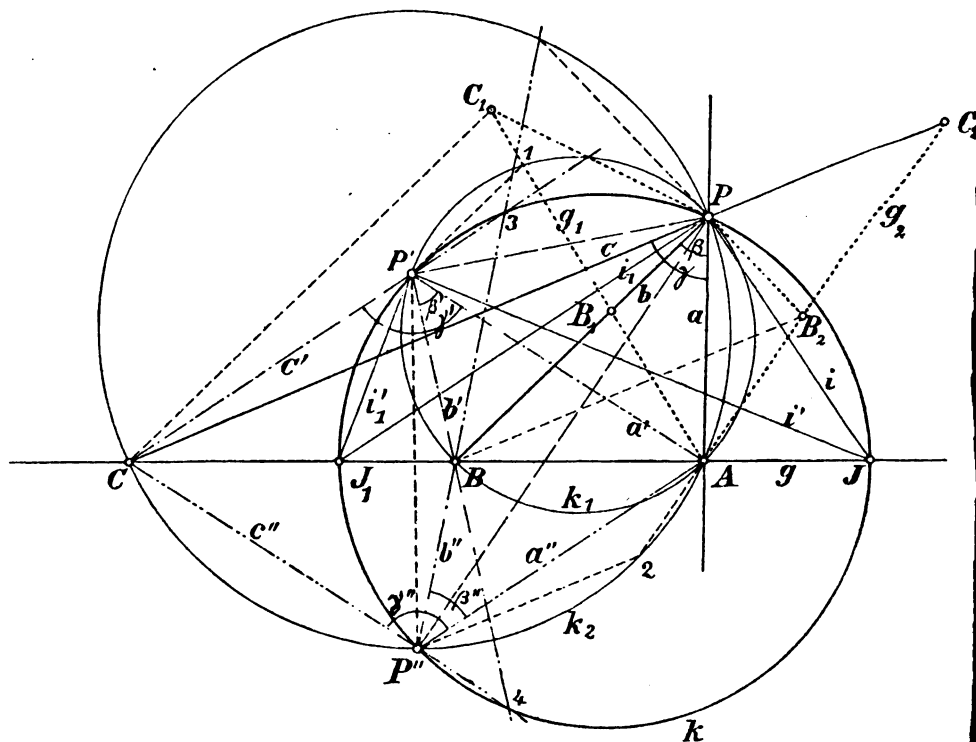
Hier ist die planimetrische Aufgabe mitgelöst worden, eine Ellipse von zwei bekannten konjugierten Durchmessern mit einem zu ihr konzentrischen Kreise zu schneiden. Weil die Winkelhalbierenden von  $h, k$  die ausgezeichneten Linien  $i, i_1$  sind, so folgt, dass die Durchmesser, auf welchen die vier Schnittpunkte liegen, zu den Axen der Ellipse orthogonal-symmetrisch liegen müssen.

— Zwei affine ebene Systeme besitzen mehrere Scharen ausgezeichneter Linien, über deren Bedeutung und Lage die nachfolgende Betrachtung Aufschluss giebt. Gehören die beiden Systeme den Klassen b) oder c) an, so ersetze man sie durch zwei ihnen ähnliche Systeme der Klasse a) und mache die letzteren im voraus centrisch-affin. Die Resultate lassen sich leicht auf die ursprünglichen Systeme übertragen.

Die zwei centrisch-affinen Systeme sollen mit  $E$  und  $E'$  bezeichnet werden; es sei  $g$  die Axe und  $P, P'$  ein Paar entsprechender Punkte, auf derselben Seite von  $g$  liegend (Fig. 99, S. 184). Das orthogonal-symmetrische System  $E''$  von  $E'$  in Bezug auf die Axe  $g$ , ist mit  $E$  ebenfalls centrisch-affin, wobei  $g$  die Affinitätsaxe und  $P, P''$  ein Paar entsprechender Punkte ist. Der durch  $P, P', P''$  gelegte Kreis  $k$  schneide  $g$  in  $J, J_1$ . Die Verbindungslinien dieser Punkte mit  $P, P', P''$  sind die entsprechenden rechtwinkligen Strahlenpaare  $i, i_1; i', i'_1; i'', i''_1$  der drei Systeme.

Alle durch  $P$  und  $P'$  gehenden Kreise bilden ein Kreisbüschel. Einer dieser Kreise,  $k_1$ , schneide  $g$  in zwei (selbst-entsprechenden) Punkten  $A, B$ . Den Strahlen  $PA = a$ ,  $PB = b$  entsprechen  $P'A = a'$ ,  $P'B = b'$  und  $P''A = a''$ ,  $P''B = b''$ . Dabei sind  $(ab) = \beta$ ,  $(a'b') = \beta'$ ,  $(a''b'') = \beta''$  entsprechend

Fig. 99.



gleiche Winkel der drei Systeme. — Sämtliche Kreise durch  $P, P''$  bilden ein zweites Kreisbüschel\*. Der Kreis  $k_2$  dieses Büschels schneide  $g$  in den zwei Punkten  $A, C$ ; ihre Verbindungslinien mit  $P, P', P''$  seien  $a, c$ ;  $a', c'$ ;  $a'', c''$ . Die Winkel  $(ac) = \gamma$ ,  $(a'c') = \gamma'$ ,  $(a''c'') = \gamma''$  sind entsprechende. Die unter sich gleichen Winkel  $\gamma', \gamma''$  sind mit  $\gamma$  supplementär. —

\* Beide Kreisbüschel haben den Kreis  $k$  gemeinsam.



Mit Hilfe jener Kreise  $k_1, k_2$  findet man somit entsprechende Linienpaare der Systeme  $E, E'$ , welche sich unter gleichen Winkeln schneiden. Indem man  $k_1, k_2$  durch denselben Punkt  $A$  der Affinitätsaxe legt, findet man die zwei Linien  $b, c$  des Büschels vom Scheitel  $P$  im Systeme  $E$ , welche die Gerade  $PA = a$  dieses Büschels unter denselben Winkeln schneiden, wie ihre entsprechenden Geraden  $b', c'$  des Büschels  $P'$  im Systeme  $E'$  die Gerade  $a'$ . Die Hilfskreise kann man so wählen, dass das Schneiden unter vorgeschriebenen Winkeln geschieht. — Bevor gezeigt wird, dass diese Linien  $b, c; b', c'$  noch gewisse weitere Eigenschaften besitzen, sei zunächst daran erinnert, dass die Affinitätsstrahlen  $PP', PP''$  mit den Strahlen  $i, i_1$  gleiche Winkel bilden (vergl. Nr. 12); die Bogen  $P'JP''$  und  $P'J_1P''$  des Kreises  $k$  werden durch  $J$  und  $J_1$  halbiert.\*

Es giebt zwei mit dem Systeme  $E'$  oder  $P'A'B'$ ... (wo  $A'$  nach  $A$ ,  $B'$  nach  $B$  fällt) ähnliche Systeme  $E_1, E_2$ , welche mit dem Systeme  $E$  oder  $PAB$ ... centrisch-affin sind, mit  $a$  als Affinitätsaxe; beide werden zu  $a$  orthogonal-symmetrisch liegen. Um  $E_1$  zu erhalten, genügt es, die Figur  $P'AB$  ähnlich zu verkleinern, bis  $P'A$  mit  $PA$  gleiche Länge hat und darauf so zu drehen, bis  $P$  und  $A$  mit den entsprechenden Punkten  $P_1$  und  $A_1$  zusammenfallen. So entsteht die Figur  $PAB_1$ . Um  $E_2$  zu finden, könnte man zu  $E_1$  das symmetrische System in Bezug auf  $a$  konstruieren, also  $E_1$  um  $a$  umklappen. Man darf aber auch das Dreieck  $P''AB$  so verkleinern, bis  $P''A$  mit  $PA$  gleiche Länge hat und darauf in die Lage  $PAB_2$  drehen. Überall darf man die Punkte  $B, B_1, B_2$  durch  $C, C_1, C_2$  ersetzen. Bei der Ausführung der ersten Operation gelangt, wegen  $\beta' = \beta$ , die  $P'B$  entsprechende Linie  $PB_1$  in  $b$ . Um noch den Winkel  $P'AB$  gleich  $PAB_1$  zu haben, ziehe man aus  $P'$  eine Parallele mit  $b$  bis zu dem

\* Schneidet man  $b'$  mit  $c''$  und  $b''$  mit  $c'$ , bezüglich in 3, 4, so liegen 3, 4 mit  $P', P''$  auf einem Kreise. Die Halbierungslinie des Winkels  $B3O$  wird  $g$  in demselben Punkte schneiden, wie die Halbierende des Winkels  $BP'C$ , also in  $J_1$ . Somit ist jener Kreis mit  $k$  identisch;  $b'$  und  $c'', b''$  und  $c'$  schneiden sich auf  $k$ .

Punkte 1 auf  $k_1$ , so ist  $A1 = g_1$  die Endlage der  $A'B'$  entsprechenden Linie. Zieht man noch  $CC_1$  parallel mit  $b$ , so wird  $g_1$  in  $C_1$  geschnitten. Die so konstruierte, mit  $P'ABC$  ähnliche Figur  $PAB_1C_1$  (als Figur  $P_1A_1B_1C_1$  gedacht), bestimmt mehr als genügend das mit  $E$  ( $PABC$ ) centrisch-affine System  $E_1$ . Dabei ist  $a$  die Affinitätsaxe und  $b$  ein Affinitätsstrahl. Macht man in analoger Weise die Figur  $PAB_2C_2$  ähnlich mit  $P''ABC$ , so fällt  $PC_2$  in  $c$ ;  $PB_2$  schneidet sich mit  $b''$  auf  $k_2$ ,  $AB_2C_2 = g_2$  mit der in  $P''$  zu  $c$  gezogenen Parallelen in 2 auf  $k_2$ ; endlich muss  $BB_2$  parallel mit  $c$  sein. — Die Systeme  $E_1, E_2$  sind nun zu dem Systeme  $E$  im wesentlichen in derselben Beziehung, wie ehemals  $E'$  und  $E''$  zu  $E$ . Deshalb werden auch jetzt die Strahlen  $i, i_1$  die von den Affinitätsstrahlen  $b, c$  gebildeten Winkel halbieren. Ebenso werden auch am Scheitel  $P'$  die Linien  $b'$  und  $c'$  zu  $i'$  und zu  $i'_1$  gleich geneigt sein u. s. f. (Auch bilden die neuen Affinitätsstrahlen  $b, c$  mit den früheren  $PP', PP''$  gleiche Winkel.) Weil  $J_1P$  den Winkel des Dreiecks  $BPC$  an der Ecke  $P$  halbiert, so besteht die Proportion  $BP:CP = BJ_1:CJ_1$ . Ebenso ist  $BP:CP = BJ:CJ$ , ferner  $BP':CP' = BJ_1:CJ_1 = BJ:CJ$ , überall ohne Berücksichtigung des Vorzeichens. Aus diesen Proportionen folgt namentlich  $BP:BP' = CP:CP'$ , oder in genauerer Ausdrucksweise  $BP:B'P' = CP:C'P'$ . Für die Systeme  $E, E'$  besteht somit folgendes Resultat: Entsprechende Strecken der Linien  $b$  und  $b', c$  und  $c'$  stehen in demselben Verhältnisse zu einander.

Nach Fig. 99 findet man leicht  $a$  und  $c$ , wenn  $b$  gegeben ist. Somit ist die Möglichkeit geboten, in Nr. 12 von der Anschlusslinie  $g$  zu einer andern Anschlusslinie  $a$  überzugehen, wobei entweder  $a$  gegeben ist, oder ein Strahl ( $b, c$ ) als Affinitätsstrahl bezeichnet wird. Es zeigt sich neuerdings, dass die Affinitätsstrahlen nie zusammenfallen können (denn wenn in Fig. 99  $b$  und  $c$  in  $i_1$  zusammenfallen sollen, so müssen  $P'$  und  $P''$  in die Axe  $g$  fallen). — Auch die Resultate der nachfolgenden Untersuchung findet in Nr. 12 bez. 13 direkte Anwendung.

Es giebt stets einen Kreis  $k_1$  durch  $P$  und  $P'$  (Fig. 99), welcher  $g$  berührt. In dem Berührungspunkte sind  $A$  und  $B$  vereinigt. Es vereinigen sich auch  $a$  und  $b$ , während  $c$  davon verschieden bleibt, denn  $c$  ist die symmetrische Linie von  $b$  in Bezug auf  $i_1$  und  $i$ . Aus dem Zusammenfallen des neuen Affinitätsstrahles  $b$  mit der neuen Axe  $a$  folgt, dass  $CC_1$  mit ihnen parallel ist und dass die Systeme  $E$  und  $E_1$  flächengleich sein müssen. Ebenso sind die Systeme  $E$  und  $E_2$  flächengleich, wenn diese ausgezeichnete Affinitätsaxe  $a$  als Anschlusslinie gewählt wird.

59. Der Inhalt von Nr. 55 gestattet einige wichtige Anwendungen auf die Fundamentalaufgaben der schiefen Axonometrie. Das Axensystem  $O^r.x^ry^rz^r$ , welches der Koordinatenbestimmung der Raumpunkte zu Grunde gelegt wird, hängt von  $o = 0$  Bedingungen ab. — Das Bild  $O.xyz$  ist durch zwei Stücke, etwa die Winkel  $(z, x)$ ,  $(z, y)$ , bestimmt. Aus  $o = 0$ ,  $b = 2$  folgt  $x = 2$ . Sind bezüglich einer schiefen Axonometrie die Bilder  $x, y, z$  der räumlichen Axen bekannt, so darf man die Lage der Projektionsrichtung zu dem Bilde beliebig festsetzen, dann ist die Lage des Axensystems zu dem Bilde bestimmt; oder man darf die Lage der Projektionsrichtung zu dem räumlichen Axensysteme wählen, dann kann man die Lage der Bildebene  $P$  zu dem Axensysteme bestimmen. Über jene zwei Bedingungen könnte auch in anderer Weise verfügt werden. Denkt man auf den Axen von  $O^r$  aus drei Strecken von gleicher Länge  $e$  abgetragen, welche sich als drei Strecken  $e_1, e_2, e_3$  der Axenbilder  $x, y, z$  projizieren, so sind die Verhältnisse von  $e_1, e_2, e_3$  zu  $e$  die sogenannten Massstäbe. Zu dem Bilde  $O.xyz$  hinzu darf man zwei Massstäbe festsetzen, wobei etwa  $e_1, e_2, e$  beliebig gewählt werden, oder man darf die Verhältnisse der Massstäbe beliebig annehmen und hat zu den Längen  $e_1, e_2, e_3$  die Länge  $e$  zu bestimmen.

Zu dem in der Zeichnungsfläche  $P$  liegenden Bilde  $O.xyz$  hinzu sei die Lage der Projektionsrichtung  $p^r$  (etwa durch

Fluchtlinie und Projektionswinkel  $\varphi$ ) gegeben. Um die Lage des räumlichen Axensystems zu finden, lege man durch den Punkt  $P^r$  auf  $p^r$  die zu  $p^r$  normale Ebene  $N$ . Es seien  $x_n, y_n, z_n$  die Orthogonalprojektionen der Axenbilder  $x, y, z$  auf  $N^*$ . In  $N$  verzeichnet man ein Dreieck  $X_n, Y_n, Z_n$ , welches  $x_n, y_n, z_n$  zu Höhen hat. (Dieses Dreieck soll spitzwinklig sein, sonst wäre die Aufgabe unlösbar.) Nun giebt es zwei zu  $N$  symmetrische Punkte  $O_1^r, O_2^r$  (in  $p^r$ ), welche mit  $X_n, Y_n, Z_n$  verbunden je ein orthogonales Trieder liefern. Das erste derselben, mit den Kanten  $O_1^r X_n = x_1^r, O_1^r Y_n = y_1^r, O_1^r Z_n = z_1^r$ , schneidet die Ebene  $P$  in dem Spurendreiecke  $X_1 Y_1 Z_1$ , dessen Ecken auf  $x, y, z$  liegen. Der Höhenschnitt  $N_1$  von  $X_1 Y_1 Z_1$  ist die Orthogonalprojektion des Scheitels  $O_1^r$  auf die Ebene  $P$  und die Distanz des Dreiecks  $X_1 Y_1 Z_1$  stimmt mit  $N_1 O_1^r$  überein. Durch dieses Spurendreieck ist umgekehrt die Lage des Axensystems in bekannter Weise bestimmt. — Das zweite Axensystem  $O_2^r X_n = x_2^r, O_2^r Y_n = y_2^r, O_2^r Z_n = z_2^r$  schneidet die Ebene  $P$  in den drei auf  $x, y, z$  gelegenen Punkten  $X_2, Y_2, Z_2$ . Der Höhenschnittpunkt  $N_2$  dieses Spurendreiecks  $X_2 Y_2 Z_2$  ist die Orthogonalprojektion von  $O_2^r$  auf  $P$  und die Distanz des Dreiecks stimmt mit  $N_2 O_2^r$  überein. — Die Spurendreiecke  $X_1 Y_1 Z_1, X_2 Y_2 Z_2$  sind perspektiv mit  $O$  als Centrum und mit der Spur  $n$  der Ebene  $N$  als Axe.

Die Lage des Axensystems ist hier eine zweifache. Bedenkt man, dass dasselbe allemal in der Projektionsrichtung parallel verschoben werden darf, so folgt, dass zwei Systeme von Spurendreiecken vorkommen. Diejenigen einer und derselben Schar verhalten sich, wie in Nr. 39 auseinandergesetzt wurde. Die Punkte  $N$  beider Scharen liegen in derselben Geraden aus  $O$ , denn räumlich liegen alle Scheitel  $O^r$  in derselben Geraden  $p^r$ . Zwei Dreiecke, die zusammen beiden Scharen angehören, sind allemal perspektiv mit  $O$  als Centrum und es muss die Perspektivaxe auf der Richtung der Fluchtlinien senkrecht stehen. Denn die zugehörigen räumlichen

\* Die Ausführung geschieht wie in Fig. 101.

Trieder sind allemal symmetrisch zu derjenigen auf  $p^r$  senkrechten Ebene, welche die Entfernung der zugehörigen Scheitel  $O^r$  halbiert. — Haben die beiden Dreiecke denselben Höhenschnittpunkt  $N$ , so haben sie auch dieselbe Distanz und es fallen die bezüglichen Scheitel  $O^r$  in  $p^r$  zusammen.

Irgend zwei Dreiecke beider Scharen mögen koordinierte Spurendreiecke genannt werden. Eine paarweise Zuordnung der Dreiecke beider Scharen hat keinen Zweck, weil über die absolute Lage der Punkte  $O^r$  zu der Zeichnungsfläche keine Festsetzung getroffen wird; man denkt sich vielmehr je nach Bedürfnis die Ebenen verschiedener Spurendreiecke als mit der Zeichnungsfläche zusammenfallend und zwar für beide Scharen unabhängig voneinander.

Zwei beliebige koordinierte Spurendreiecke können den Konstruktionen des vierten Teiles zu Grunde gelegt werden. Der Übergang von einem Spurendreiecke zu einem koordinierten bedeutet räumlich den Übergang von einem Objekte zu einem neuen, welches zu dem vorigen mit Bezug auf eine gewisse Ebene  $N$  orthogonal-symmetrisch ist. Beiderlei Konstruktionen müssen deshalb für ein axonometrisch dargestelltes Objekt wesentlich dieselben Resultate ergeben. (Dabei sind selbstverständlich die Konstruktionen, welche die Lage der Elemente zu den Bildebenen zum Gegenstande haben, ausgeschlossen.) Zum Beweise der letzteren Sätze wird es genügen, von der vollständigen Darstellung eines Punktes durch  $P, P' (P'', P''')$  und von irgend zwei koordinierten Spurendreiecken auszugehen. Die zugehörigen räumlichen Axensysteme liegen zu einer Ebene  $N$  symmetrisch. Die beiden Originalpunkte  $P'_1, P'_2$  haben zu den Axensystemen dieselbe Lage, sind also ebenfalls symmetrisch zu der Ebene  $N$  gelegen. In gleicher Weise müssen die zwei Gebilde, welche dieselbe axonometrische Darstellung besitzen, zu  $N$  symmetrisch und also unter sich kongruent sein. — Es sei gestattet, ein Beispiel kurz anzuführen.

Unter denselben Voraussetzungen seien  $s_1, s_2, s_3$  die Bilder der Spuren einer Ebene. Die Originalebene sei  $E'_1$ , wenn man

das Axensystem  $O_1 \cdot X_1 Y_1 Z_1$  zu Grunde legt;  $E_1^r$ , wenn  $O_2 \cdot X_2 Y_2 Z_2$  das Axensystem ist. Die Originalebene  $E_1^r, E_2^r$  sind in Bezug auf dieselbe Ebene  $N$  orthogonal-symmetrisch gelegen, wie die Axensysteme. (Sie sind also durchaus nicht symmetrisch in Bezug auf die Bildebene  $P$ , es sei denn, es handle sich um den Spezialfall der orthogonalen Axonometrie, in welchem übrigens alle Spurendreiecke nur eine Schar bilden.) Figuren in  $E_1^r$  und  $E_2^r$ , die dasselbe Bild haben (wie z. B. die Spurendreiseite mit den Bildern  $s_1, s_2, s_3$ ), sind kongruent. Die Linien  $h^r$  und  $k^r$  beider Ebenen (Nr. 14) haben ebenfalls dieselben Bilder, jedoch so, dass allemal das Bild einer Linie  $h^r$  der einen Ebene und einer Linie  $k^r$  der andern Ebene sich decken (vergl. die Fussnote zu S. 42).

In dem vierten Teile sind ein Spurendreieck  $XYZ$  (oder an Stelle dessen die Richtungen  $p_1^0, p_2^0, p_3^0$  aus  $O$ , Nr. 38), sowie die schiefen Projektionen  $OX = x, OY = y, OZ = z$  der Axen als bekannt vorausgesetzt. Die Projektionsrichtung  $p^r$  ist dadurch gegeben\* und man muss somit die Schar der koordinierten Spurendreiecke finden können. Diese Bestimmung lässt sich unmittelbar nach der auf Seite 188 angestellten Betrachtung durchführen, wobei eine auf  $p^r$  senkrechte Ebene  $N$  gewählt wird. In der nachfolgenden Nummer soll indessen eine einfachere Lösung der gestellten Aufgabe gegeben werden.

**60.** Aus den gegebenen vier Punkten  $X, Y, Z, O$  kann ein koordiniertes Spurendreieck  $X^*Y^*Z^*$  gefunden werden. Nach vorangehender Nummer hat man den Scheitel  $O^r$  des gegebenen Axensystems, welcher um die Distanz  $ND$  vertikal über  $N$  liegt, mit  $O$  zu verbinden. Zu dieser Verbindungslinie  $p^r$  legt man in  $O^r$  die Normalebene  $N$ . Nun bestimme man das zu dem gegebenen Axensysteme  $O^r \cdot x^r y^r z^r$  oder  $O^r \cdot XYZ$  symmetrische  $O^r \cdot x^r_* y^r_* z^r_*$ , so werden seine Axen die Ebene  $P$  in den Ecken  $X^*Y^*Z^*$  des gesuchten Dreiecks schneiden. Auch schneiden die Flächen  $x^r_* y^r_*, x^r_* z^r_*, y^r_* z^r_*$  jenes

---

\* Dass sich für  $p^r$  zwei orthogonal-symmetrische Stellungen zu  $P$  ergeben, braucht an dieser Stelle nicht berücksichtigt zu werden.

symmetrischen Systems die Ebene  $P$  in den Seiten  $p_1^*$ ,  $p_2^*$ ,  $p_3^*$  des koordinierten Spurendreiecks.

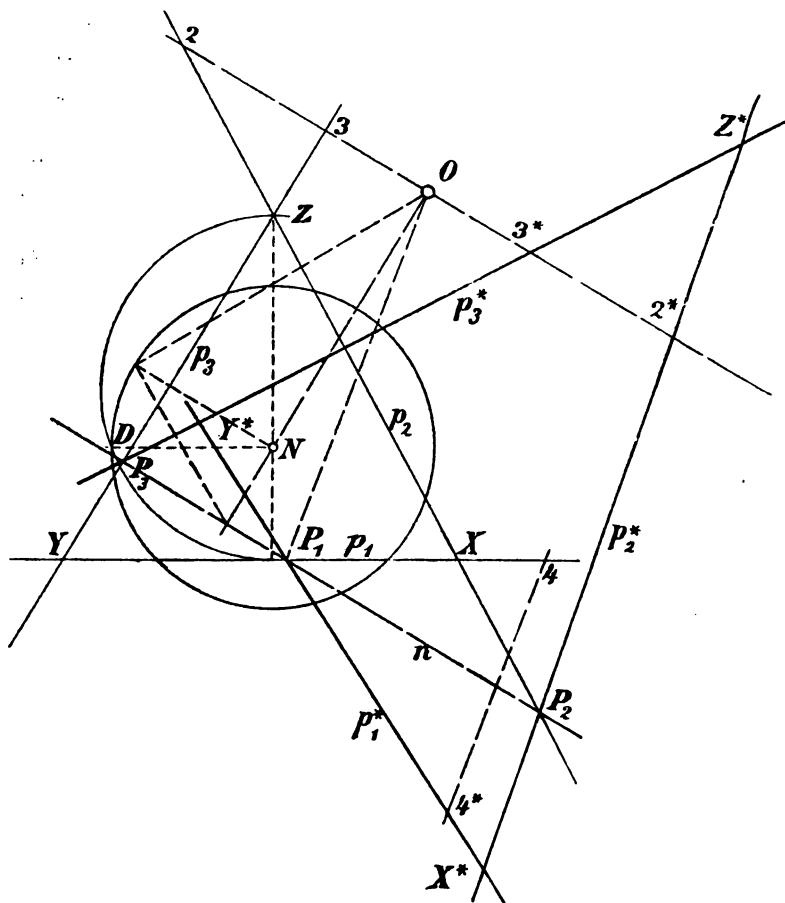
Um somit  $p_1^*$  zu finden, legt man die zu der Ebene  $x^r y^r$  in Bezug auf  $N$  symmetrische Ebene  $x^{r*} y^{r*}$ , sie wird  $P$  in  $p_1^*$  schneiden. Dabei gehen die Ebenen  $x^r y^r$ ,  $x^{r*} y^{r*}$  und  $N$  durch dieselbe Gerade. Längs dieser Geraden denke man sich die auf  $N$  senkrechte Ebene  $R$  errichtet. Dann sind die Ebenen  $x^r y^r$ ,  $x^{r*} y^{r*}$  zu  $N$  und zu  $R$  orthogonal-symmetrisch gelegen. Jede zu  $N$  parallele Gerade schneidet  $x^r y^r$ ,  $x^{r*} y^{r*}$  und  $R$  in drei Punkten, von denen der letzte in der Mitte der beiden ersten liegt. Dasselbe gilt in Bezug auf die Schnittpunkte jeder zu  $R$  parallelen Geraden mit den Ebenen  $x^r y^r$ ,  $x^{r*} y^{r*}$ ,  $N$ . — Für die zu  $N$  symmetrischen Ebenenpaare  $x^r z^r$ ,  $x^{r*} z^{r*}$  und  $y^r z^r$ ,  $y^{r*} z^{r*}$  führe man ebenso die in ihren Schnittlinien mit  $N$  auf  $N$  errichteten Normalebenen  $S$ ,  $T$  ein.

Die Spur  $n$  der Normalebene  $N$  schneidet  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  in  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  (Fig. 100, S. 192). Die Konstruktion dieser Punkte ist in Nr. 18 angegeben worden. Die Ebene  $x^r y^r$  oder die Ebene  $O^r p_1$  schneidet  $N = O^r n$  in der Geraden  $O^r P_1$ . Die längs  $O^r P_1$  auf  $N$  senkrechte Ebene  $R$  schneidet  $P$  in  $P_1 O$ . Die Spur  $p_1^*$  ist durch  $P_1$  zu ziehen und es haben nach einer oben gemachten Bemerkung  $p_1$ ,  $p_1^*$ ,  $n$  eine solche Lage zu einander, dass  $n$  die mit  $P_1 O$  (also mit der Ebene  $R$ ) parallelen, zwischen  $p_1$  und  $p_1^*$  gelegten Sekanten halbiert. Konstruiert man also zu dem Punkte 4 auf  $p_1$  den schief-symmetrischen 4\* in Bezug auf  $n$  als Symmetrieaxe und mit der Richtung  $P_1 O$  der Symmetriestrahlen, so wird 4\*  $P_1$  die Linie  $p_1^*$  sein. An Stelle dieser schiefen Symmetrie hätte man auch die zwischen  $p_1$  und  $p_1^*$  bestehende, welche  $P_1 O$  als Axe und  $n$  zur Richtung der Symmetriestrahlen hat, verwenden können. Indem man die analogen Konstruktionen für  $p_2^*$ ,  $p_3^*$  ausführt, findet man, dass auf der durch  $O$  zu  $n$  gezogenen Parallelen der Punkt  $O$  die Mitte ist zwischen den entstehenden Schnittpunkten 1, 1\* mit  $p_1$ ,  $p_1^*$ ; 2, 2\* mit  $p_2$ ,  $p_2^*$ ; 3, 3\* mit  $p_3$ ,  $p_3^*$ .

Nachdem in dieser Weise die Seiten  $p_1^*$ ,  $p_2^*$ ,  $p_3^*$  des koordinierten Spurendreiecks gefunden sind, ergeben sich ihre

Schnittpunkte  $X^*, Y^*, Z^*$  als die Ecken dieses Dreiecks. Sie müssen auf  $x, y, z$  liegen. Zudem ist  $N$  auch für das Dreieck  $X^*Y^*Z^*$  der Höhenschnitt. Endlich haben die koordinierten Dreiecke  $XYZ, X^*Y^*Z^*$  dieselbe Distanz.

Fig. 100.



61. Bekanntlich bestimmt ein Spurendreieck die Lage des Axensystems zu der Bildebene und die Wahl des Punktes  $O$  bedeutet darauf die Festsetzung der Projektionsrichtung. Der Punkt  $O$  lässt sich so wählen, dass zwei Axenbilder gegebene



Länge haben und somit, wenn jene Axenlängen  $O^r X$ ,  $O^r Y$ ,  $O^r Z$  bekannt sind, dass man für zwei Axen vorgeschriebene Massstäbe erhält. Weiter kann man  $O$  so wählen, dass die Massstäbe der drei Axen in vorgeschriebenen Verhältnissen zu einander stehen. Auch könnte bei der Wahl des Punktes  $O$  massgebend sein, dass die Axenbilder vorgeschriebene Winkel miteinander bilden. — Es sollen nachfolgend einige besondere Lagen des Punktes  $O$  besprochen werden. Dabei sei im voraus bemerkt, dass jede unendlich ferne Lage des Punktes  $O$  ausgeschlossen ist, weil die Projektionsrichtung nicht mit der Bildebene parallel sein darf.

Liegt  $O$  in einer Seite des Spurendreiecks  $XYZ$ , so haben dieses Dreieck und das koordinierte  $X^*Y^*Z^*$  diese Seite und seine gegenüberliegende Ecke gemein. Liegt nämlich  $O$  in  $p_1$ , so geht die Ebene  $N$  durch  $z^r$  und steht auf der Ebene  $x^r y^r$  senkrecht. Daher fallen die Axen  $z^r$  und  $z^{r*}$ , ferner die Ebenen  $x^r y^r$  und  $x^{r*} y^{r*}$  zusammen; es werden  $Z^* = Z$ ,  $p_1^* = p_1$ . Dagegen wird  $X$ ,  $Y$  von  $X^*$ ,  $Y^*$  im allgemeinen verschieden sein. Nur wenn  $x^r$ ,  $y^r$  zu der Projektionsrichtung  $p^r = O^r O$  (in  $x^r y^r$ ) orthogonal-symmetrisch liegen, so werden  $X = Y^*$ ,  $Y = X^*$ ,  $p_2 = p_3^*$ ,  $p_3 = p_2^*$ .

Wenn  $O$  in eine Ecke des Spurendreiecks fällt, so fallen  $XYZ$  und  $X^*Y^*Z^*$  zusammen. Die Projektionsrichtung fällt hier mit einer Axe zusammen, die Ebene  $N$  ist die gegenüberliegende Koordinatenebene und das Axensystem ist sein eigenes Spiegelbild in Bezug auf die Ebene  $N$ .

Liegt  $O$  in einer Höhentransversalen des Dreiecks  $XYZ$ , so fällt mit derselben die entsprechende Höhe von  $X^*Y^*Z^*$  zusammen. — Liegt  $O$  im Höhenschnitt  $N$ , so handelt es sich um die orthogonale Axonometrie und es werden die Dreiecke  $XYZ$  und  $X^*Y^*Z^*$  centrisch-symmetrisch.

Die bisherigen Beispiele beziehen sich auf Spezialfälle der schiefen Axonometrie, welche teilweise bereits besprochen worden sind. In diesen Fällen bietet der Übergang von dem gegebenen Spurendreiecke zu dem koordinierten keinerlei Vereinfachung. Eine solche tritt aber dann ein, wenn für im Endlichen liegende Ecken  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  eine der Ecken  $X^*$ ,  $Y^*$ ,  $Z^*$

unendlich fern liegt. Die Spurendreiecke der letzteren Schar haben alsdann zwei parallele Seiten. Es entsteht so die Frage nach der Lage des Punktes  $O$  für den Fall, dass eine Ecke, etwa  $X^*$ , in das Unendliche rückt.

Für das Dreieck  $XYZ$  sei  $N$  der Höhenschnitt,  $d$  die Distanz. Verbindet man  $O^r$ , um  $d$  vertikal über  $N$  liegend, mit  $X$ , so entsteht die Axe  $x^r$ . Durch  $O^r$  lege man  $x^{r*}$  von beliebiger Richtung, jedoch parallel zu der Bildebene  $P$ . Hierauf hat man die Projektionsrichtung  $p^r$  oder  $O^rO$  so zu wählen, dass  $x^r$  und  $x^{r*}$  in Bezug auf die Ebene  $N$  orthogonal-symmetrisch liegen. Dann liegen sie aber auch symmetrisch zu  $p^r$ . Es muss somit  $p^r$  die von  $x^r$  mit  $x^{r*}$  gebildeten Winkel halbieren. Wenn man hiernach durch  $X$  zu  $x^{r*}$  eine Parallele zieht und darauf von  $X$  aus die Länge  $XO^r$  abträgt, so ist der Endpunkt einer der gesuchten Punkte  $O$ . (Denn es bestimmen  $O^r$ ,  $X$ ,  $O$  als drei Ecken einen Rhombus, dessen Diagonale  $O^rO$  den Winkel von  $O^rX = x^r$  mit  $x^{r*}$  halbiert.) Es folgt: Der Ort des Punktes  $O$ , für welchen die Ecke  $X^*$  unendlich fern liegt, ist der Axenkreis  $x^2$  (Nr. 16). — Natürlich sind die Punkte der übrigen Axenkreise in derselben Weise ausgezeichnet. — Eine doppelt spezielle Lage des Punktes  $O$  wäre ein Schnittpunkt zweier Axenkreise. Nach Nr. 16 schneiden sich beispielsweise die Axenkreise  $x^2$  und  $y^2$  in den Punkten  $U_1$ ,  $U_2$  der Höhe  $ZU$ . Liegt  $O$  in einem dieser Punkte, so liegen  $X^*$  und  $Y^*$  unendlich fern, während  $Z^*$  in  $N$  fallen muss. Denn es sind alsdann die Axen  $x^{r*}$ ,  $y^{r*}$  der Ebene  $P$  parallel,  $z^{r*}$  steht also auf  $P$  senkrecht.

Anmerkung. Aus dem eben Behandelten geht hervor, dass die Linien  $O^rU_1$ ,  $O^rU_2$  die von  $O^rZ$ ,  $O^rN$  gebildeten Winkel halbieren. Es teilen also  $U_1$ ,  $U_2$  die Strecke  $ZN$  in demselben Verhältnisse, in welchem die Längen  $ZO^r$ ,  $NO^r$  zu einander stehen ( $z^r : d = ZU_1 : NU_1 = ZU_2 : NU_2$ , abgesehen vom Vorzeichen). Die Linien  $O^rU_1$ ,  $O^rU_2$  stehen also aufeinander senkrecht. Der Kreis über dem Durchmesser  $U_1U_2$ , dessen Centrum in  $U$  liegt, schneidet den Distanzkreis im Durchmesser; die Schnittsehne ist die aus  $N$  zu  $XY$  gezogene Parallele.

62. Die Anfertigung axonometrischer Zeichnungen, bei welchen die Projektion des Raumgebildes aus den Koordinaten seiner Punkte hergeleitet wird, stützt sich auf den (Pohlkeschen) Satz: Drei Strecken von beliebiger Länge, die in einer Ebene von einem Punkte aus unter beliebigen Winkeln gegeneinander gezogen werden, bilden eine Parallelprojektion gleicher auf drei rechtwinkligen Koordinatenachsen vom Anfangspunkte aus abgetragener Strecken. Nach diesem Satze kann man einen gegebenen Würfel stets so projizieren, dass eine Ecke mit ihren drei Nachbarecken sich als ein Viereck abbilden, das einem gegebenen Vierecke ähnlich ist. (Dann handelt es sich im allgemeinen um eine anisometrische Projektion; erhalten zwei Bilder von Würfelkanten gleiche Länge, so ist die Projektion eine monodimetrische; sind alle Kantenbilder von gleicher Länge, so ist die Projektion eine isometrische.) An Stelle jener vier Würfecken darf man die Ecken eines willkürlichen Tetraeders setzen: Ein beliebig gegebenes Tetraeder  $A'B'C'D'$  kann man stets so projizieren, dass sein Bild  $ABCD$  einem gegebenen Vierecke  $A_0B_0C_0D_0$  ähnlich ist. Diese Verallgemeinerung des Pohlkeschen Satzes soll nachfolgend behandelt werden.

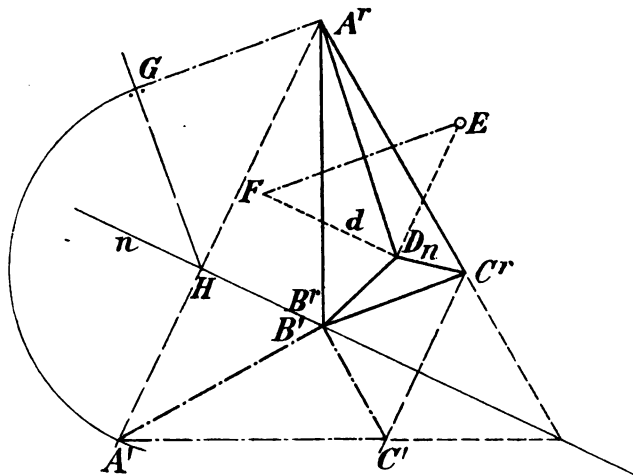
Das Tetraeder  $A'B'C'D'$  ist durch  $a = 6$  Stücke bestimmt, sein Bild, als ein Viereck, durch  $b = 5$ . Es folgt, dass man bei gegebenem Bilde für das Original und die Projektionsrichtung über  $x = 5$  Stücke zu verfügen hat. Also kann nicht ein beliebiges Viereck das Bild eines gegebenen Tetraeders sein, sondern es dürfen nur vier Bestimmungsstücke des Vierecks gewählt werden. Wählt man zwei benachbarte Winkel und die Verhältnisse der sie einschliessenden drei Seiten, so ist die Aufgabe lösbar und stimmt mit der oben genannten überein.

Das Tetraeder sei mit der Fläche  $A'B'C'$  in die Zeichnungsfläche gelegt worden. Die Ecke  $D'$  liege um ihre Distanz  $d$  vertikal über  $D_n$  (Fig. 101, S. 196). Der durch  $D'$  gezogene projizierende Strahl schneidet die Fläche  $A'B'C'$  in einem Punkte  $E$ , der so gelegen ist, dass die Figuren  $A_0B_0C_0D_0$  und

$A^r B^r C^r E$  affin sind. Denn es ist  $A^r B^r C^r E$  als eine Parallelprojektion des gesuchten, mit  $A_0 B_0 C_0 D_0$  ähnlichen Vierecks  $ABCD$  zu betrachten. Trägt man  $d$  in  $D_n$  rechtwinklig zu  $ED_n$  ab, so giebt der Endpunkt  $F$ , mit  $E$  verbunden, die um  $ED_n$  umgelegte Projektionsrichtung an.

Unter Zugrundelegung dieser Lage der Projektionsrichtung zu dem Objekte wird nun  $ABC$  eine schiefe Projektion von

Fig. 101.



$A^r B^r C^r$  sein. Um  $ABC$  selbst und seine Lage zu der Projektionsrichtung zu finden, wird man  $A^r B^r C^r$  auf eine zu der Projektionsrichtung senkrechte Ebene  $N$  projizieren. Es entsteht ein Dreieck  $A' B' C'$ , welches in Fig. in wahrer Grösse verzeichnet ist. (Den Punkt  $D^r$  braucht man hier nicht mehr zu berücksichtigen, weil  $A' B' C' D'$  mit  $A_0 B_0 C_0 D_0$  affin wäre.) Endlich konstruiert man nach Nr. 50  $ABC$  ähnlich dem gegebenen Dreiecke  $A_0 B_0 C_0$ , so dass es  $A' B' C'$  zu seiner Orthogonalprojektion hat.

Diese Auflösung zeigt, dass die Lage der Projektionsrichtung zu dem Objekte eindeutig bestimmt ist, ebenso ist das Bild  $ABCD$  eindeutig bestimmt. Die Projektionsrichtung kann zu der Bildebene die eine von zwei orthogonal-symme-

trischen Stellungen haben. Da sich — wie immer — die am Objekte und die an dem Bilde gefundenen Projektionsstrahlen in doppelter Weise zusammenlegen lassen, so wären im ganzen vier Stellungen des Objekts zu dem Bilde denkbar.

63. In Fig. 61 ist die stereometrische Figur, bestehend aus einem rechtwinkligen Axensysteme, einer schneidenden Ebene und der Senkrechten aus dem Scheitel auf diese Ebene dargestellt. Es soll untersucht werden, wie diese Figur als schiefe Parallelprojektion des beschriebenen Objektes gezeichnet werden kann.

Das Objekt hat drei Bestimmungsstücke, nämlich die Lage von  $O^rN$  zu dem Axensysteme und die Länge dieser Normalen auf die Schnittebene. Das Bild ist ein Fünfeck, über dessen Gestalt vorläufig keine Voraussetzung gemacht wird. Dann bestehen die Werte  $a = 3$ ,  $b = 7$ ;  $x = 0$ . Das Fünfeck  $O^rXYZN$  ist also stets eine schiefe Parallelprojektion des vorgestellten Objektes und es sind Objekt, Projektionsrichtung und Lage dieser beiden zu dem Bilde durch dieses Bild bestimmt. — Für die Ebene  $P$  kommen  $NX$ ,  $p_3$ ;  $NY$ ,  $p_2$ ;  $NZ$ ,  $p_1$ , als gegenüberliegende Linien vor. Nach irgend einem Punkte verschoben müssen sie drei sich trennende Paare liefern. Die in Fig. 61 enthaltenen Randlinien der Ebene  $P$  sind ein weiteres Paar gegenüberliegender Linien, wenn die Originale aufeinander senkrecht stehen sollen. — Dass für die Ebene  $NO^rZ$  ebenfalls zwei Rechtwinkelpaarbilder ( $UO^r$ ,  $O^rZ$ ;  $O^rN$ ,  $UZ$ ) vorkommen, hat hier zur Folge, dass  $U$  und  $Z$  zu verschiedenen Seiten von  $N$  aus liegen müssen. — Die Bestimmung des Originalen und der Projektionsrichtung soll hier nicht ausgeführt werden, es sei diesbezüglich auf die folgende Nummer verwiesen.

Ein derartiges Objekt soll nun in Orthogonalprojektion dargestellt werden (Fig. 102, S. 198). Das Tetraeder  $A^rB^rC^rO^r$ , vom Bilde  $ABCO$ , soll bei  $O$  eine dreirechtwinklige Ecke haben.  $O^rN^r$  ist das aus jenem Scheitel auf die Ebene  $A^rB^rC^r$  gefällte Perpendikel. Auch hier ist  $a = 3$  und für  $ABCON$  als beliebiges Fünfeck  $b = 7$ , somit  $x = -2$ . Das Bild muss so-



worden. Um das Objekt zu finden, bedenke man, dass  $OA$ ,  $BC$  die Bilder von zwei sich rechtwinklig kreuzenden Geraden sind mit  $UO$  als dem Bilde ihres kürzesten Abstandes, wende diesbezüglich Nr. 53 an u. s. f.

In Nr. 11 mit Fig. 20 findet sich eine Konstruktion ausgeführt, welche sich hier unmittelbar anwenden lässt. — Die rechtwinkligen gegenüberliegenden Linien in  $UAO$  sind in Fig. 102 durch Benutzung der Involution bestimmt worden.

Fig. 61 kann auch eine **Centralprojektion** des gegebenen Objektes sein. Zu dem Bilde  $XYZO \cdot N$  giebt es jedoch noch kein bestimmtes Original und Centrum. Denn es besteht hier im allgemeinen die Formel  $x = o + 6 - b$ , wobei das Objekt durch  $o$ , das Bild durch  $b$  Bedingungen bestimmt wird. — Zu dem Objekte hinzu darf man das Projektionscentrum und die Bildebene wählen, also über 6 Bedingungen verfügen. Ist das Bild gegeben und soll man das Objekt, das Centrum und die Lage der Bildebene und des Centrums zu dem Objekte bestimmen, so darf man bezüglich dieser zu bestimmenden Dinge noch über  $x = o + 6 - b$  Bedingungen verfügen, darauf wird sich im allgemeinen eine endliche Zahl von Lösungen ergeben. — Wird in Fig. 61 das Bild  $XYZO \cdot N$  als beliebiges Fünfeck gezeichnet, so ist  $x = 2$ . Es muss hier somit zweifach unendlich viele Centralprojektionen geben, welche zu dem Bilde ein Objekt von der beschriebenen Form liefern.

Für die Centralprojektion eines Dreiecks ist  $x = 6$ . Ist das Bild bekannt, so wird man die Lagen des Centrums und der Dreiecksebene zu dem Bilde, oder das Centrum und die Gestalt des Originaldreiecks, oder die Lage der Originalebene und die Gestalt des Dreiecks, beliebig wählen dürfen, darauf werden die übrigen Stücke bestimmt sein. — Für ein Viereck ist ebenfalls  $x = 6$ . Kennt man das Bild und das Original, so darf man noch über den Winkel zwischen Originalebene und Bildebene verfügen. Sind das Bild und die Lage des Centrums zu demselben gegeben, so hat man noch über drei Stücke des Vierecks zu verfügen. Das Viereck spielt für die ebenen Systeme, welche hier kollinear sind, dieselbe Rolle, wie das Dreieck bei den Parallelprojektionen ebener Systeme und

bei den affinen Figuren. — Gibt man Bild und Original eines Tetraeders, so müssen unendlich viele Centralprojektionen angegeben werden können.

Für den Kreis reduziert sich die Konstante in der Formel auf  $5 : x = o + 5 - b$ . Es ist neuerdings  $b = 2$ , also folgt  $x = 4$ . Beispielsweise findet man den Originalkreis (zweideutig) und die Projektion, wenn Kreisbild, Projektionscentrum und Radius gegeben sind. (Bei gegebenem Centrum handelt es sich hier um dessen Lage zu dem Bilde.)

**64.** Wenn man in drei Punkten  $A^r, B^r, C^r$ , auf den drei Kanten einer körperlichen Ecke  $S^r$ .  $A^r B^r C^r$  gelegen, die Normal-ebenen  $\alpha^r, \beta^r, \gamma^r$  zu diesen Kanten errichtet, so entsteht eine Polarecke vom Scheitel  $S_1^r$ . Fig. 103 giebt das Bild dieser Raumfigur in schiefer Parallelprojektion.

Ein Körper von der Gestalt  $S^r A^r B^r C^r A_1^r B_1^r C_1^r S_1^r$ , vom Bilde  $SABCA_1 B_1 C_1 S_1$ , an welchem die Winkel  $S^r C^r B^r \dots$  nicht gleich  $90^\circ$  sind, ist durch  $o = 12$  Stücke bestimmt (Nr. 54). Zeichnet man das Bild als ein beliebiges Achteck, so ist  $b = 13$ . (Dabei sind die acht Punkte so zu verbinden, dass sechs Vierecke entstehen, von denen in jeder Ecke drei zusammenstossen.) Es würde so folgen  $x = 3$ . Bei diesem Körper kann man, wenn das Bild gezeichnet ist, dem Originale, seiner Stellung zu dem Bilde und der Projektionsrichtung drei Bedingungen auferlegen. Wenn man aber verlangt, dass alle sechs Winkel von  $a^r b^r$  mit  $\gamma^r a^r, \gamma^r b^r$  etc. rechte seien, so hat man über drei Bedingungen zuviel verfügt und es muss das Bild in dreifacher Weise spezialisiert sein. Dieses Bild ist somit durch  $13 - 3 = 10$  Stücke bereits bestimmt.

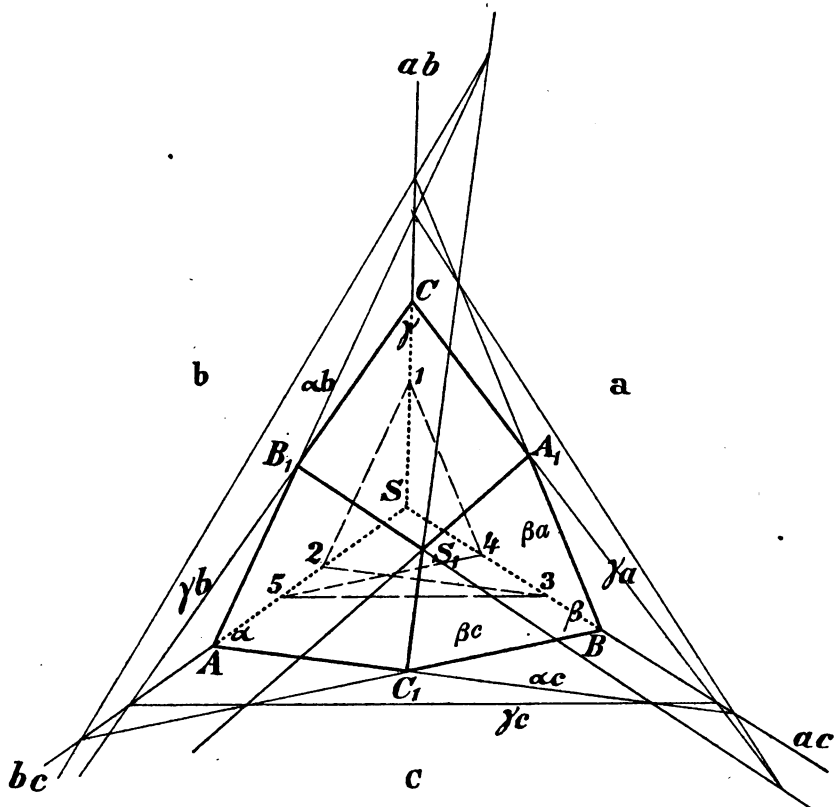
Die Konstruktion des Bildes aus 10 Bedingungen geschieht wie folgt (Fig. 103, S. 201). Man verzeichnet  $S, ab, ac, bc$  (2 Bed.), darauf  $A, ab, ac$  (3 Bed.) und  $B, \beta a, \beta c$  (3 Bed.). Die Ebenen  $\alpha, \beta$  verschiebt man parallel, bis sie sich irgendwo (in 1) auf  $ab$  schneiden. Die Linie  $\gamma c$  muss darauf mit 35 parallel sein (Nr. 54). Zu 35 wird die Parallele  $\gamma c$  gezogen (1 Bed.). Nun darf man noch  $\gamma a$  oder  $\gamma b$  wählen (1 Bed.). Nachdem so die Ebenen  $\alpha, \beta, \gamma$  durch ihre Schnitte mit  $a, b, c$  bestimmt sind,



ergeben sich ihre Schnitte  $\alpha\beta$ ,  $\alpha\gamma$ ,  $\beta\gamma$  als die Kanten der Polarecke von Scheitel  $S_1$ .

Es soll noch gezeigt werden, dass das Objekt, seine Lage zu der Projektionsrichtung und die Lage der Projektions-

Fig. 103.



richtung zu dem Bilde aus dem Bilde gefunden werden können. Bestimmt man eine dem Objekte ähnliche Raumfigur  $S'A'B'C'A_1B_1C_1S_1$ , so lässt sich durch Eintragen irgend eines scheinbaren Schnittpunktes des Bildes die Lage von  $p'$  zu  $S'A'B'$ ... finden. In Fig. schneiden sich  $SA$  und  $S_1B_1$  in einem gewissen Punkte, welcher die Strecken  $SA$  und  $S_1B_1$  in zwei bestimmten Verhältnissen teilt. Hierauf bestimme



als  $D'$  zu wählen, dann zieht man  $A'D'$ ,  $C'D'$ ;  $A'B'$  parallel  $D'F$  und  $C'B'$  parallel  $D'E$ . So entsteht das gesuchte Viereck  $A'B'C'D'$ , welches in  $B'$  und  $D'$  rechtwinklig und mit  $ABCD$  centrisch affin ist.

Es haben beide Vierecke namentlich den Diagonalpunkt  $O$  entsprechend gemein. Indem man  $A'B'C'D'$  beliebig ähnlich vergrößert, entsteht die allgemeine Lösung der Aufgabe. Die Anwendung auf Fig. 103 liefert Vierecke, die mit

$$\begin{aligned} S^r A^r C_1^r B^r, \\ S^r B^r A_1^r C^r, \\ S^r C^r B_1^r A^r \end{aligned}$$

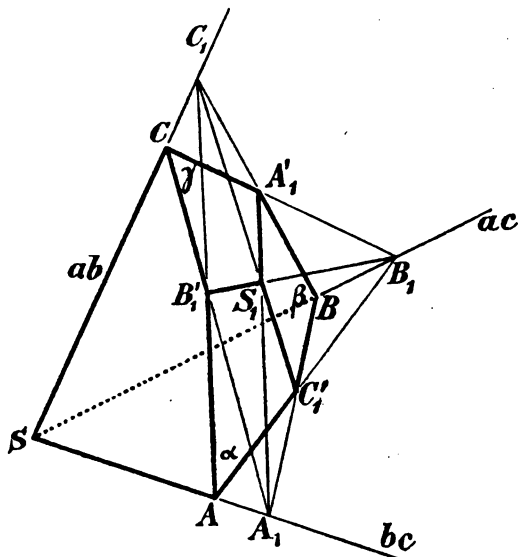
ähnlich sind. Ha-

ben das erste und das zweite die Seite  $S'B'$ , das erste und dritte  $S'A'$  gleich, so lassen sie sich zu der Raumfigur  $S'A'B'C'A_1B_1C_1$  zusammensetzen, worauf auch  $S_1$  bestimmt sein wird.

(Da in Fig. 104 die Paare  $AD$ ,  $DC$ ;  $ED$ ,  $DF$  sich trennen müssen, so werden sich die Hilfskreise in reellen Punkten schneiden, es folgt, dass jene Aufgabe stets eindeutig lösbar ist. Das der Auflösung zu Grunde gelegte Verfahren giebt zugleich die Auflösung der folgenden allgemeinen Aufgabe: Man bestimme ein zu einem gegebenen ebenen Systeme affines System, in welchem zwei Winkel gegebene Grössen haben. Diese Aufgabe hat, wie am Schlusse von Nr. 49 auf S. 140 im voraus des Näheren angegeben wurde, unendlich viele Lösungen.)

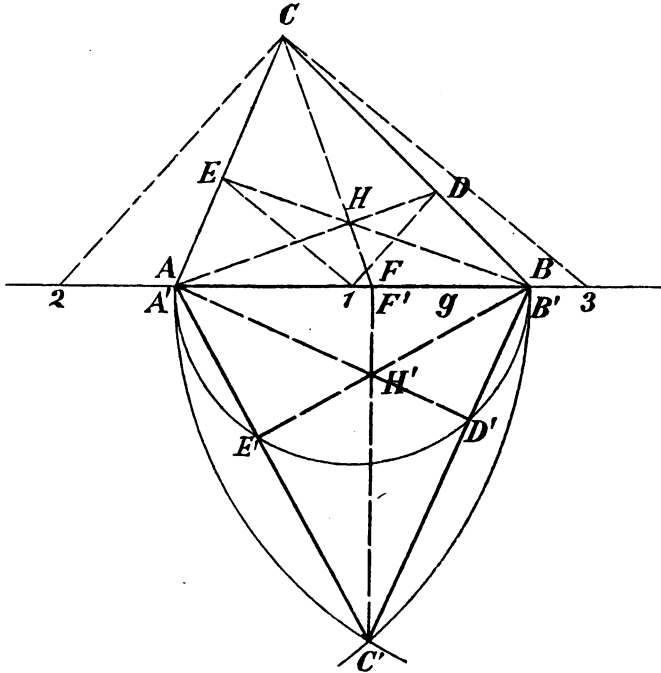
Fig. 105 giebt das Bild einer Ecke  $S^r A^r B^r C^r$  und der Polarecke  $S_1^r A_1^r B_1^r C_1^r$  für den Fall, dass  $\alpha^r$  und  $\beta^r$  sich in  $C_1^r$

Fig. 105.



auf  $a^r b^r$ ,  $a^r$  und  $\gamma^r$  in  $B_1^r$  auf  $a^r c^r$ , endlich  $\beta^r$  und  $\gamma^r$  in  $A_1^r$  auf  $b^r c^r$  schneiden. Für das Objekt ist  $o = 4$ , für das Bild  $b = 8$ , also folgt  $x = 0$ ; das Original und die Projektionsrichtung sind durch das Bild vollständig bestimmt. — Zur Konstruktion des Bildes aus 8 Stücken ziehe man  $ab$ ,  $ac$ ,  $bc$

Fig. 106.



(2 Bed.) und wähle auf diesen Kantenbildern die Punktepaare  $C, C_1$ ;  $B, B_1$ ;  $A, A_1$  (6 Bed.).

Um zu einem der acht Vierecke  $SA_1C_1B_1$  etc. ein seinem Originale ähnliches zu finden, wird man die folgende Konstruktion ausführen. Es sei allgemein  $ABC$  (Fig. 106) das Bild eines Dreiecks,  $H$  das Bild eines Höhenschnittes; man konstruiere ein dem Originaldreiecke  $A^r B^r C^r$  ähnliches  $A' B' C'$ . Es ist gestattet,  $A' B'$  mit  $AB$  zusammenfallend anzunehmen. In dem Höhenfusspunkte  $F' = F$  dieser Seite errichte man die

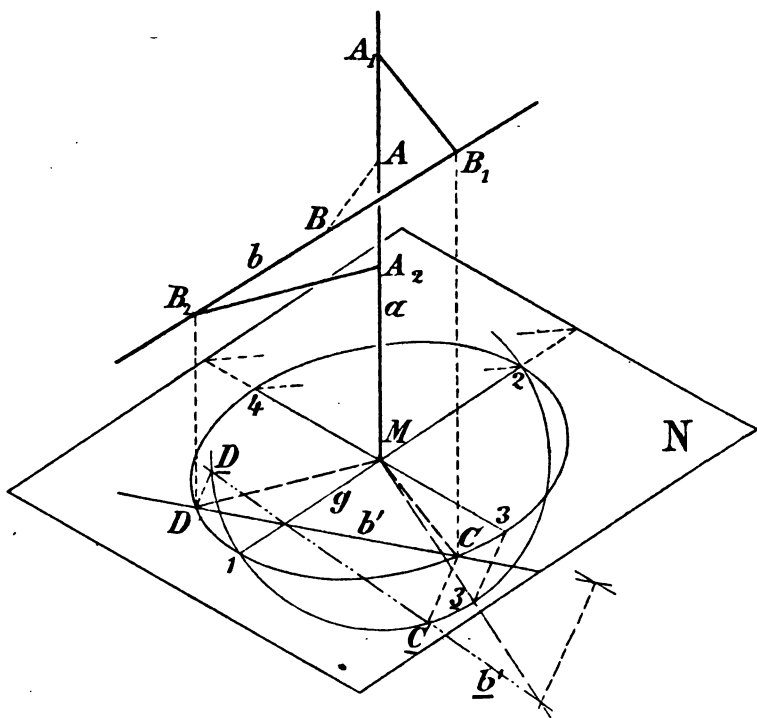
Senkrechte auf sie, so entsteht die Höhe  $F'H'C'$  des gesuchten Dreiecks. Den Bildern der übrigen Höhenfusspunkte,  $D$  und  $E$ , entsprechen Punkte  $D'$ ,  $E'$ , welche auf dem über  $A'B'$  als Durchmesser gezogenen Kreise liegen. Ausserdem liegen  $D'$ ,  $E'$  so, dass die Teilverhältnisse  $B'D':B'C'$  und  $A'E':A'C'$  bezüglich mit  $BD:BC$  und  $AE:AC$  übereinstimmen. Deshalb wird  $C'$  in folgender Weise gefunden: Man verbinde  $D$  mit dem Centrum 1 des Hilfskreises, zieht dazu aus  $C$  die Parallele bis zum Punkte 2 in  $AB$ . Der durch  $B'$  gehende Kreis vom Centrum 2 muss durch  $C'$  gehen. Ebenso könnte man  $C3$  parallel mit  $E1$  ziehen und um 3 einen Kreis schlagen, der durch  $A'$  geht, so wird er ebenfalls durch  $C'$  gehen. — Indem man neben dem so gefundenen Dreieck  $A'B'C'$  alle ähnlichen Vergrösserungen desselben ausgeführt denkt, entstehen alle Lösungen der Aufgabe.

Bei der Lösung dieser Aufgabe lässt sich auch das in Fig. 104 befolgte Verfahren anwenden, weil in der gesuchten, mit  $ABCH$  affinen Figur zwei rechte Winkel vorkommen müssen; man wird ebenfalls eine Seite des Dreiecks  $ABC$  als Affinitätsaxe benutzen u. s. f.

65. Es soll folgende Raumfigur abgebildet werden. Zwei windschiefe Geraden  $a^r$ ,  $b^r$  haben zwei Transversalen  $A_1^r B_1^r$ ,  $A_2^r B_2^r$ , welche  $a^r$  rechtwinklig schneiden und zwischen  $a^r$  und  $b^r$  (bezüglich zwischen  $A_1^r$  und  $B_1^r$ ,  $A_2^r$  und  $B_2^r$ ) dieselbe Länge  $l$  haben. Um diese Transversalen zu finden, würde man zu  $a^r$ , etwa in ihrem Punkte  $M^r$ , eine Normalebene  $N^r$  legen und in derselben um  $M^r$  den Kreis vom Radius  $l$  beschreiben. Dieser Kreis schneidet die Orthogonalprojektion  $b_1^r$  von  $b^r$  auf  $N^r$  in zwei Punkten  $C^r$ ,  $D^r$ , welche die Projektionen von  $B_1^r$ ,  $B_2^r$  auf die Ebene  $N$  sind. Die durch sie mit  $a^r$  gezogenen Parallelen schneiden  $b^r$  in  $B_1^r$ ,  $B_2^r$ . Darauf sind  $B_1^r A_1^r$ ,  $B_2^r A_2^r$  bezüglich mit  $C^r M^r$ ,  $D^r M^r$  parallel. — Es soll ein genaues Bild dieser Raumfigur verzeichnet werden, jedoch so, dass parallele Linien als ebensolche abgebildet werden.

Das verlangte Bild ist im allgemeinen eine schiefe Parallelprojektion (Fig. 107\*). Man verzeichnet ein Kreisbild vom Mittelpunkte  $M$ , zieht  $a$  aus  $M$  in beliebiger Richtung, wählt  $b$  und  $b'$  beliebig und zieht aus den Schnittpunkten  $C, D$  von  $b'$  mit dem Kreisbilde die Linien  $CB_1$ ,

Fig. 107.



$DB_2$  parallel mit  $a$ . Endlich sind  $A_1B_1$  parallel  $MC$  und  $A_2B_2$  parallel  $MD$  die Bilder der gesuchten Transversalen. Verbindet man die Mitte  $A$  von  $A_1A_2$  mit der Mitte  $B$  von  $B_1B_2$ , so entsteht das Bild  $AB$  des kürzesten Abstandes  $A'B'$

\* Für die Darstellung in Centralprojektion liegt  $M$  beliebig in der Ebene des Kreisbildes (Ellipse, Hyperbel oder Parabel) und es schneiden sich  $MC$  und  $A_1B_1$ ,  $MD$  und  $A_2B_2$  auf der Polaren des Punktes  $M$  bezüglich des Kreisbildes;  $CB_1$  und  $DB_2$  schneiden sich auf  $a$ .



tenuse stimmt mit  $MK$  direkt überein. Mit  $s$  als Anschlusslinie verzeichnet man das dem Originaldreiecke kongruente Dreieck  $M(J)K$ , welches um  $90^\circ$  um  $s$  gedreht in das Originaldreieck  $MJ^rK$  übergeht. Der Punkt  $J^r$  gelangt hierbei um die Distanz  $(J)J_n$  vertikal über  $J_n$  und es wird  $J^rJ$  die Projektionsrichtung  $p^r$ ,  $J_nJ$  die Fluchtlinie  $f$  des Punktes  $J^r$  sein. — Mit der Richtung  $p^r$  projiziert sich der Kreis  $H_1J^rH_2$  als die Ellipse  $H_1JH_2J_1$  und  $a^r$  als  $a$ . Zu  $A_1, A_2$  ergeben sich ebenso  $A_1^r, A_2^r$  und es lässt sich nun überhaupt das Original zu Fig. 107 leicht finden. — Würde in Fig. 108  $J$  in  $s$  liegen, so kreuzen sich die Projektionsrichtung  $p^r$  und die Spur  $h$  rechtwinklig, dann muss auch  $a$  in  $s$  fallen (Nr. 41, erste Fussnote).

Für jede der Linien  $h$  und  $k$  (Fig. 108) als Spur ergeben sich zwei zu der Bildebene  $P$  symmetrische Lagen des Originals zu Fig. 107, somit im ganzen vier Lösungen. Ihre Realität hängt davon ab, dass  $MK$  (Fig. 108) grösser ist als  $l$ .

In dem bereits erwähnten Spezialfalle giebt es unendlich viele Originale. Dieser Fall hat vor allem die Besonderheit, dass  $l$  gleich ist einer Axe des Kreisbildes. In Fig. 108 wird  $H_1H_2$  zu der einen Axe des Kreisbildes, in welcher sich  $h$  und  $k$  vereinigen und welche auf  $a$  senkrecht stehen muss. Diese Axe hat die Länge  $2l$ . In  $s$  finden sich  $a$  und  $JJ_1$  vereinigt. Der Punkt  $J^r$  liegt vertikal über  $s$  von  $M$  um  $l$  entfernt, also auf einem Kreise, und  $JJ^r$  ist die unbestimmte Projektionsrichtung. Das Vorhandensein der unendlich vielen Lösungen hängt damit zusammen, dass hier die Abzählung der Bedingungen eine besondere wird ( $o = 4, b = 6; x = o + 3 - b = 1$ ). Durch das Bild ist die Länge  $l$  gleich der halben auf  $a$  senkrechten Axe des Kreisbildes bestimmt und  $x = 1$  bezieht sich darauf, dass der Neigungswinkel von der Kreisebene mit der Bildebene beliebig gewählt werden kann).

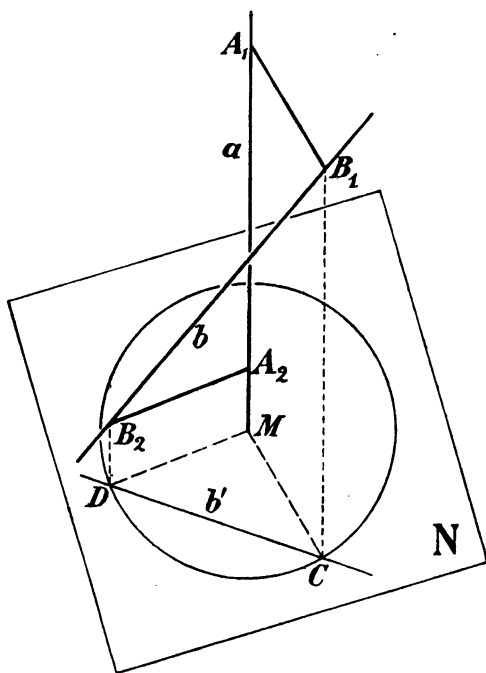
Ein weiterer Spezialfall wird durch Anwendung einer Orthogonalprojektion entstehen. In Fig. 106 fällt  $a$  in die kleine Axe des Kreisbildes, dessen grosse Axe die Länge  $2l$  hat. Es bestehen die Werte  $o = 4, b = 6; x = 0$ . Durch



das Bild ist das Original bestimmt. Ist  $m$  die halbe kleine Axe des Kreisbildes, so hat man  $N^r$  so durch die grosse Axe zu legen, dass sie mit der Bildebene den Winkel  $\arccos \frac{m}{l}$  einschliesst. Es ergeben sich zwei Lagen desselben Objektes, nämlich orthogonal-symmetrisch zu der Bildebene.

Der wichtigste Spezialfall besteht jedoch in folgender Abbildungsweise. Soll sich der in  $N^r$  liegende Kreis wieder als Kreis abbilden, so wähle zu dem Objekte hinzu die Richtung  $p^r$  beliebig. (Damit hat man über 6 Bedingungen verfügt.) Die Bildebene  $P$  wird nun parallel mit  $N^r$  oder so gelegt, dass  $N^r$  und  $P$  zu  $p^r$  orthogonal-symmetrisch liegen. In jedem der beiden Fälle ist  $P$  bestimmt. Es entsteht das in Fig. 109

Fig. 109.



verzeichnete Bild mit  $b = 5$ . Es wird  $x = 6 - 5 = 1$  oder  $x = 0 + 2 - b = 1$ . Zu dem Bilde giebt es unendlich viele Originale, welche nachfolgend bestimmt werden sollen.

Die Orthogonalprojektion der Projektionsrichtung  $p^r$  auf die Bildebene  $P$  ist parallel mit  $a$ . Es sei  $p^r$  irgend einer dieser, etwa durch  $M$  gelegten, projizierenden Strahlen. Durch den Kreis in  $P$  lege man den Cylinder, dessen Erzeugenden mit  $p^r$  dieselbe Richtung haben. Die Originalebene ist irgend eine Kreisschnittebene dieses Cylinders. — Die einen Kreis-

schnittebenen sind mit  $P$  parallel. Am einfachsten wählt man als Ebene dieser Schar  $E' = P$  als Ebene des Originalkreises. Dann fällt dieser Kreis mit seinem Bilde zusammen und die in  $M' = M$  auf  $E' = P$  errichtete Senkrechte ist  $a'$ . Die durch  $A_1, A_2$  gezogenen projizierenden Linien schneiden  $a'$  in  $A'_1, A'_2$ , u. s. f. — Als Ebene des Originalkreises kann man auch die durch  $M' = M$  gelegte „Wechselschnittebene“ jenes Cylinders wählen. Sie werde neuerdings mit  $E'$  bezeichnet. Die Spur von  $E'$  in  $P$  ist die in  $M$  auf  $a$  errichtete Senkrechte. Im übrigen liegen  $E'$  und  $P$  zu  $p'$  orthogonal-symmetrisch. Durch Angabe von  $p'$  ist somit auch hier die Lage der Originalebene eindeutig bestimmt. Der Kreisschnitt der Ebene  $E'$  bezüglich jenes Cylinders ist der Originalkreis, die in  $M' = M$  auf  $E'$  errichtete Senkrechte ist  $a'$ , sie hat  $a$  zu ihrer Orthogonal- und zugleich zu ihrer schiefen Projektion auf  $P$ . Im übrigen ist auch hier wieder der Übergang von dem Bilde zu dem Originale ein eindeutiger.

---

### Nachträge.

Fig. 3 bietet nicht ein neues Beispiel, giebt vielmehr die bei Fig. 2 beschriebene Construction in anderer Ausdrucksweise.

In Fig. 22 ist  $Q, J_1$  mit  $i_1$  zu bezeichnen.

Am Schlusse von Nr. 13 ist zu berichtigen, dass es zwei Schaaren von Anschlussgeraden giebt, in Bezug auf welche die Flächengleichheit besteht.

In Nr. 58, S. 187, ist zu beachten, dass es stets zwei durch  $P$  und  $P'$  gehende Kreise giebt, welche  $g$  berühren. Es giebt somit im ganzen zwei Schaaren jener ausgezeichneten Affinitätsaxen, sie liegen zu den ausgezeichneten Linien  $i_1, i_1$  orthogonal-symmetrisch.

---













AUG - 8 1922

Math 5808.89  
Neue Behandlung der Parallelprojekt  
Cabot Science 003356542



3 2044 091 922 641